WIRTSCHAFTSSCHULE KV CHUR FORMAZIUN SURSELVA BILDUNG KBO KAUFMÄNNISCHE BERUFSSCHULE OBERENGADIN

Abschlussprüfung 2018 Mathematik

Lösungen

Material Arbeitsblätter, Häuschenblätter

Hilfsmittel netzunabhängiger, nicht programmierbarer Taschenrechner, Formelblatt

Zeit 120 Minuten

Hinweise

- **Beschriften Sie alle Häuschenblätter** mit Ihrem Namen und Vornamen.
- Sie müssen nicht der Reihe nach arbeiten. Kennzeichnen Sie aber jede Aufgabe mit der entsprechenden Nummer und trennen Sie die nächste Nummer mit einer waagrechten Linie ab.
- Der Lösungsweg muss überall übersichtlich dargestellt werden; unbelegte Resultate werden nicht berücksichtigt!
- Mehrfachlösungen sind nicht gestattet; Ungültiges ist deutlich zu streichen. Die gültigen Endergebnisse sind deutlich zu kennzeichnen.
- Die Lösungen und Lösungswege sind auf die bereitgelegten Häuschenblätter zu schreiben, nur die Grafiken werden direkt auf den Aufgabenblättern erstellt.

Bewertung

Aufgabe	mögliche Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	6	
2	14	
3	9	
4	10	
5	9	
6	14	
7	11	
8	7	
8 Aufgaben	**80**	

1. Lineares Gleichungssystem (____/6)

Lösen Sie das Gleichungssystem nach x und y und geben Sie die Lösungsmenge sowie die Bedingungen an. ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$)

$$\left| \begin{array}{c} \frac{x}{a} - d = c - \frac{y}{b} \\ \frac{14x}{7a} - \frac{2y}{b} = 2(c-d) \end{array} \right|$$

Lösung

$$\left| \begin{array}{c} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = c + d \\ \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} = 2c - 2d \end{array} \right| erste\ Gleichung\ mit\ 2\ multiplizieren$$

$$\left| \begin{array}{c} \frac{2x}{a} + \frac{2y}{b} = 2c + 2d \\ \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} = 2c - 2d \end{array} \right| Addition \quad \boxed{1\text{ P}}$$

$\boxed{1\text{ P}}$ $\frac{4x}{a} = 4c \rightarrow x = ac$ $\boxed{1\text{ P}}$

$in\ I \rightarrow \frac{ac}{a} + \frac{y}{b} = c + d \ /-c; \cdot b; \ \rightarrow y = bd$ $\boxed{1\text{ P}}$

$\mathbb{L} = \{(ac; bd)\}\ wobei\ a \neq 0;\ \ b \neq 0;$

$\boxed{1\text{ P}}$ $\boxed{1\text{ P}}$

2. Gleichungen (____/14)

a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge $\mathbb{D}$ und Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der unten folgenden Bruchgleichung ($\mathbb{G} = \mathbb{R}$). (5)

$$\frac{x}{3x-4} - 2 = -\frac{1}{8-6x}$$

Lösung $\boxed{1\text{ P}}$

$$\frac{x}{3x-4} - 2 = \frac{1}{2(-4+3x)} \quad /\cdot 2(3x-4) \rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{4}{3}\right\} \quad \boxed{1\text{ P}}$$

$$2x - 4(3x-4) = 1$$

$\boxed{1\text{ P}}$
$$-10x = -15$$

$$x = \frac{3}{2} \quad \boxed{1\text{ P}}$$

$$\mathbb{L} = \left\{\frac{3}{2}\right\} \quad \boxed{1\text{ P}}$$

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der folgenden quadratischen Gleichung in $\mathbb{G} = \mathbb{R}$. (5)

$$\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 - (x+2)(x-4) = (x+1)^2 + 8$$

Lösung

$$\frac{x^2-4x+4}{4} - x^2 + 2x + 8 = x^2 + 2x + 1 + 8 \quad \boxed{2\text{ P}}$$

$$x^2 - 4x + 4 - 4x^2 + 8x + 32 = 4x^2 + 8x + 36 \quad \boxed{1\text{ P}}$$

$$0 = 7x^2 + 4x$$

$$0 = x(7x+4) \quad \boxed{1\text{ P}}$$

$$\mathbb{L} = \left\{-\frac{4}{7}; 0\right\} \quad \boxed{1\text{ P}}$$

c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der folgenden Exponentialgleichung in $\mathbb{G} = \mathbb{R}$. (4)

$$\left(\frac{96}{6}\right)^{(2x+1)} - 4^{2x+3} = 0$$

Lösung

$$16^{(2x+1)} - 4^{2x+3} = 0 \quad \boxed{1\text{ P}}$$

$$4^{2(2x+1)} = 4^{2x+3} \quad \boxed{1\text{ P}}$$

$$4x + 2 = 2x + 3 \quad \boxed{1\text{ P}}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{2}\right\} \quad \boxed{1\text{ P}}$$

oder

$$16^{(2x+1)} = 4^{2x+3} \quad \boxed{1\text{ P}}$$

$$(2x+1)lg16 = (2x+3)lg4 \quad \boxed{1\text{ P}}$$

$$2xlg16 + lg16 = 2xlg4 + 3lg4$$

$$x(2lg16 - 2lg4) = (3lg4 - lg16) \;/:(\;) \quad \boxed{1\text{ P}}$$

$$x = \frac{1}{2};\ \mathbb{L} = \left\{\frac{1}{2}\right\} \quad \boxed{1\text{ P}}$$

3. Textaufgaben (____/9)

a) Ein Erbe von CHF 17'500.— soll auf vier Erben verteilt werden. Der Erste bekommt 20% mehr als der Dritte. Der Zweite soll aber einen Viertel weniger erhalten als der Erste. Schliesslich erhält der Vierte CHF 1'500.— mehr als der Zweite. Wie viel erhält jeder aus dem Erbe? (5)

Lösung

$A \rightarrow\ 1.2x = \frac{12}{10}x$ 2 P $= CHF\ 4'800.-$

$B \rightarrow\ 0.75 \cdot 1.2x = 0.9x = \frac{9}{10}x = CHF\ 3'600.-$ 1 P

$C \rightarrow\ x = \frac{10}{10}x = CHF\ 4'000.-$

$D \rightarrow\ 0.9x + 1500 = \frac{9}{10}x + 1500 = CHF\ 5'100.-$

$$4x + 1500 = 17'500$$

$$x = 4'000$$ 2 P

b) Ein Kaffeehändler mischt 14 kg der edlen Sorte Arabica mit 26 kg einer günstigeren Sorte, welche CHF 18.— pro Kilogramm kostet. Damit erhält er eine Mischung, welche CHF 27.45 je Kilogramm kostet. Wie teuer ist die Sorte Arabica je Kilogramm? (4)

Lösung 2 P

$$14 \cdot x + 26 \cdot 18 = 40 \cdot 27.45$$

$$14x = 630$$ 1 P

$$x = 45$$

Die Sorte Arabica kostet CHF 45.— pro Kilogramm. 1 P

4. Quadratische Funktionen (____/10)

Zur quadratischen Funktion $p: y = ax^2 + 4x + c$ gehören die Punkte $P_1\ (0/6)$ und $P_2\ (-4/6)$.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung, indem Sie die Parameter a und c berechnen. (3)

Lösung

I $für\ P_1\ gilt$: $6 = a \cdot 0 + 4 \cdot 0 + c \rightarrow c = 6$ 1 P

II $für\ P_2\ gilt$: $6 = a \cdot (-4)^2 + 4 \cdot -4 + 6 \rightarrow a = 1$ 1 P $\rightarrow p: y = x^2 + 4x + 6$ 1 P

b) Bestimmen Sie den Scheitelpunkt und allfällige Nullstellen der Parabel. (3)

Lösung

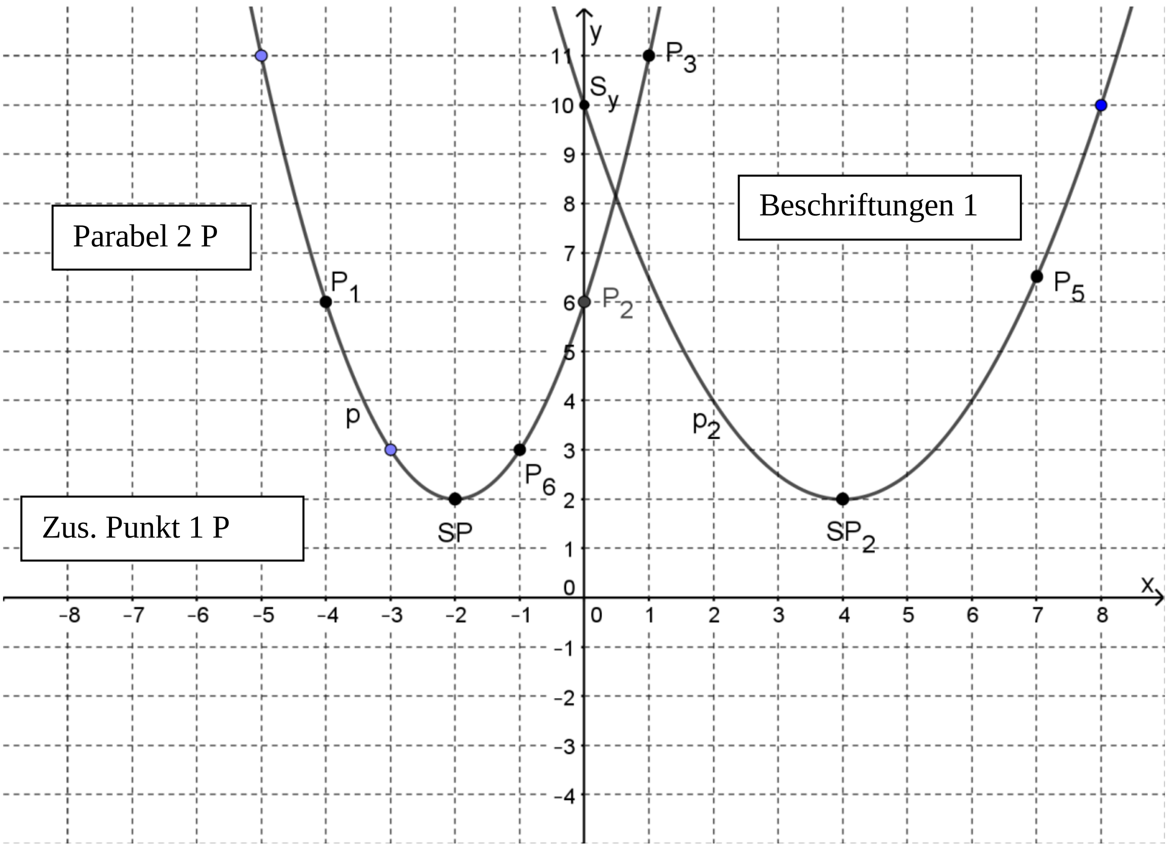
$$0 = x^2 + 4x + 6 \rightarrow x_{1;2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 24}}{2} \rightarrow keine\ Nullstellen$$ 1 P

oder y-Wert von SP ist 2 und die Parabel ist nach oben geöffnet$\rightarrow$ $keine\ Nullstellen$

$$SP\left(-\frac{4}{2}, 6 - \frac{16}{4}\right) = SP(-2, 2); \quad alternativ\ SP_2\left(-\frac{-4}{2 \cdot \frac{1}{2}}, 10 - \frac{16}{4 \cdot \frac{1}{2}}\right) = SP_2(4, 2)$$ 2 P

c) Zeichnen Sie diese Parabel unter Mithilfe eines weiteren berechneten Punktes in das unten folgende Koordinatensystem ein und markieren Sie die berechneten sowie die gegebenen Punkte. (4)

Lösung



5. Finanzmathematik/Rentenrechnung (____/9)

a) Auf einem Konto lagen am Anfang des ersten Jahres CHF 10'000.—. Am Ende des Jahres wurden die Zinsen gutgeschrieben und der Sparer hob CHF 4'000.— ab. Nun senkte die Bank den Zinssatz um 0.75%. Wie hoch war der ursprüngliche Zinssatz gewesen, wenn der Saldo am Ende des zweiten Jahres CHF 6'236.75 betrug? (5)

Lösung

1. Jahr: $10'000+\frac{10000\cdot p}{100}-4000$ 1 P

$6'000+100p$

2. Jahr $6'000+100p+\frac{(6'000+100p)(p-0.75)}{100}=6'236.75$ 2 P

$600'000+10'000p+(6'000+100p)(p-0.75)=623'675$

$600'000+10'000p+6'000p-4'500+100p^2-75p=623'675$ 1 P

1 P $100p^2+15'925p-28'175=0$

$p_{1,2}=\frac{-15'925\pm\sqrt{15925^2+4\cdot 100\cdot 28'175}}{200}=\frac{-15'925\pm 16'275}{200}$ $p_1=1.75$; $[p_2=-..]$

oder $(10'000\cdot q-4'000)\left(q-\frac{0.75}{100}\right)=6236.75$ 2 P

$10'000q^2-75q-4'000q+30=6236.75$

$10'000q^2-4'075q-6206.75=0$

2 P $q_{1;2}=\frac{4075\pm\sqrt{(-4075)^2-4\cdot 10'000\cdot 6206.75}}{20'000}$

$q_1=1.0175$; $[q_2=-\cdots]$ 1 P

Der Zinssatz betrug im ersten Jahr 1.75%.

b) Eva ist heute fünfzig Jahre alt und möchte sich in zwölf Jahren frühzeitig pensionieren lassen. Um auch in der Rente gut über die Runden zu kommen, bräuchte sie von der Pensionskasse jährlich CHF 36'000.— ausbezahlt (nachschüssig). Wie hoch müsste ihr angespartes Kapital bei der Pension sein, wenn sie mit einer Lebenserwartung von 87 Jahren und einem Zinssatz von 6% rechnet? (4)

Lösung 1 P 1 P 1 P 1 P

$R_0=r\cdot\frac{q^n-1}{q^n\cdot(q-1)}=36'000\cdot\frac{1.06^{25}-1}{1.06^{25}\cdot(0.06)}=460'200.82$ Es müsste CHF 460'200.80 hoch sein.

6. Lineare Funktionen und Optimierung (____/14)

a) Ein Rennwagen der Klasse 3 kostet im Ankauf CHF 950'000.—. Mit jedem Rennjahr muss er aber mit stolzen CHF 252'000.— linear abgeschrieben werden. Der Fahrer möchte den Wagen gerne selber besitzen und hat dafür schon CHF 175'000.— zur Seite gelegt. Dazu kann er jeden Monat CHF 10'000.— auf die Seite legen. Einfachheitshalber werden die Zinsen des Kontos nicht berücksichtig!

1. Erstellen Sie die beiden Funktionsgleichungen für die lineare Abschreibung des Wagens und für das Konto des Fahrers (beide mit dem Zeitmass Monat). (2)

Lösung

$Rennwagen \rightarrow a: y = -21'000x + 950'000$ 1 P

$Konto \rightarrow k: y = 10'000x + 175'000$ 1 P

2. Berechnen Sie, wann und zu welchem Preis er den Wagen übernehmen kann. (3)

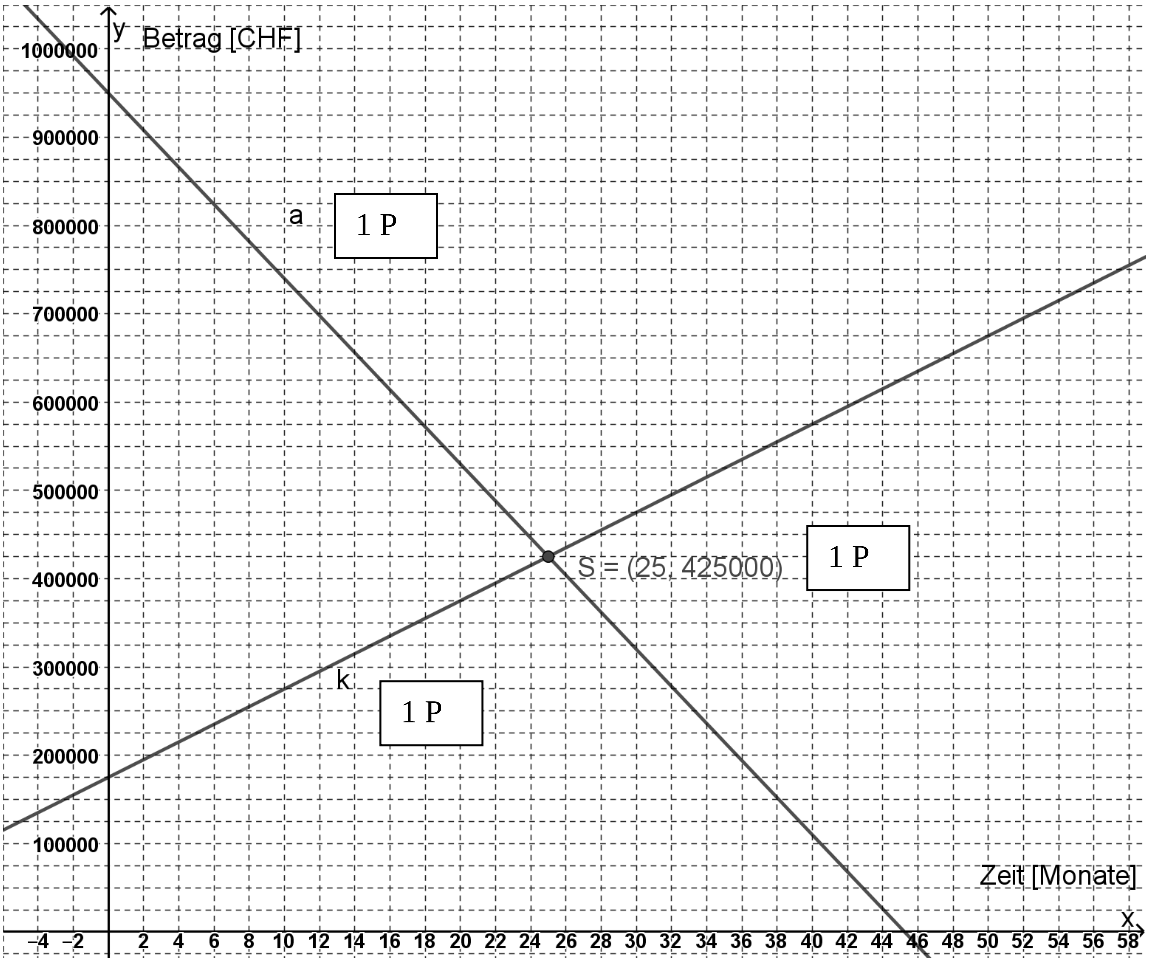
Lösung

$-21'000x + 950'000 = 10'000x + 175'000$ 1 P

$775'000 = 31'000x \rightarrow x = 25 \rightarrow y = 10'000 \cdot 25 + 175'000 = 425'000$ x 1 P, y 1 P

Es dauert 25 Monate und der Preis liegt bei CHF 425'000.—.

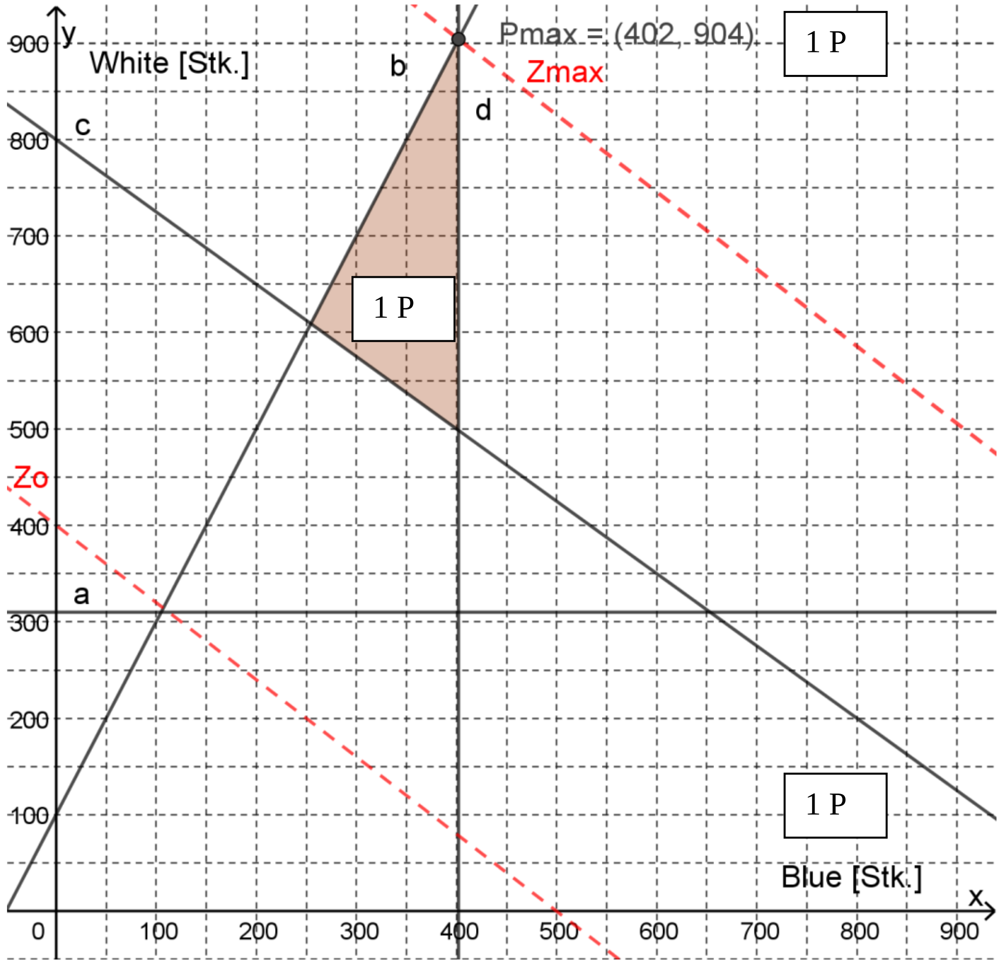
3. Zeichnen Sie den Sachverhalt in das folgende Koordinatensystem ein. (3)



b) Das unten folgende Koordinatensystem zeigt die Graphen der Produktionsbedingungen einer Firma aus England, welche Wasserbecken herstellt. Dabei gilt:
Definitionen: «Blue»: x Stück; «White»: y Stück; $\mathbb{G} = \mathbb{N}_0 \mathrm{x}\, \mathbb{N}_0$
Ungleichungssystem: $(a)\ y \geq 310; (b)\ y \leq 2x + 100; (c)\ y \geq -\frac{3}{4}x + 800; (d)\ \ x \leq 402$
Zielfunktion: $Z = 1200x + 1500y \quad (Gewinn\ pro\ Becken\ in\ £)$

1. Vervollständigen Sie das Koordinatensystem und markieren Sie das Planungs-polygon. (2)

Lösung



2. Bestimmen Sie P_{max} mithilfe der bearbeiteten Grafik und **auch rechnerisch**. (3)

Lösung

1 P 1 P

$$\{P\} = b \cap d \rightarrow aus\ d\ gilt: x = 402 \rightarrow y = 2 \cdot 402 + 100 = 904;\ P_{max}(402; 904)$$

3. Bestimmen Sie den maximalen Gewinn. (1)

Lösung

$$Z = 1200 \cdot 402 + 1500 \cdot 904 = 1'838'400$$ 1 P

Der Gewinn ist maximal £ 1'838'400.

7. Datenanalyse (____/11)

Die Folgendes Säulendiagramm zeigt die Absenzen von 12 Schülerinnen und Schülern einer Klasse im ersten Semester eines Schuljahres.

a) Füllen Sie die Häufigkeitstabelle hier unten aus. (1)

Schüler	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M
Absenzen in Tagen	2	5	6	5	4	2	3	5	2	5	10	5

1 P

b) Bestimmen Sie den Modus und den Median der gegebenen Probe. Als Hilfe können Sie dazu die untenstehende Tabelle verwenden. (2)

Lösung

Modus =5 Tage 1 P

1 P

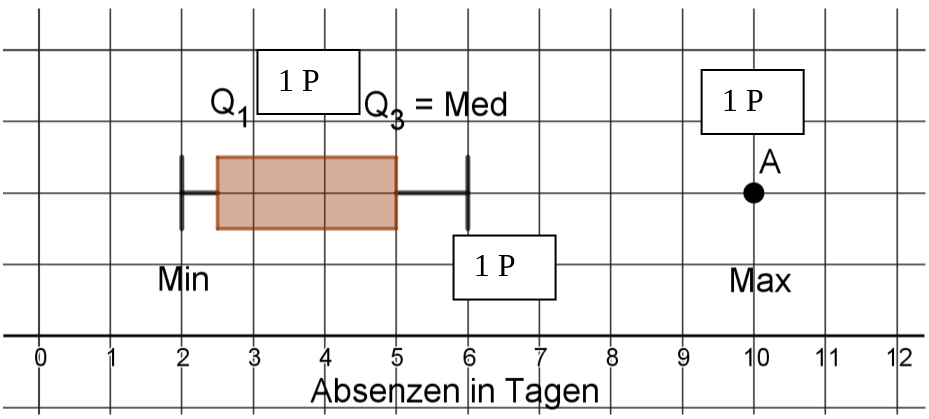
Probewerte	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Absenzen (geordnet)	2	2	2	3	4	5	5	5	5	5	6	10
Aufgabe c)	Min		q_1			Median			q_3			Max

c) Zeichen Sie den Boxplot in das untenstehende Raster ein, nachdem Sie alle nötigen Überlegungen, Berechnungen und Notizen gemacht haben. (2)
Überprüfen Sie auch, ob der kleinste sowie der grösste Wert dieser Probe nach unserer Definition für Ausreisser (q_1 minus 1.5 mal den Interquartilsabstand bzw. q_3 plus 1.5 mal den Interquartilsabstand) ein solcher ist. Zeigen Sie dies rechnerisch. (2)

Lösung

unterer Whisker muss minimal folgenden Wert haben
$= 2.5 - 1.5 \cdot (5 - 2.5) = 2.5 - 3.75 = -1.25$
Alle Werte der Probe sind grösser → keine unteren Ausreisser. 1 P

Oberer Whisker darf maximal folgenden Wert haben
$= 5 + 1.5 \cdot (5 - 2.5) = 5 + 3.75 = 8.75$
Der Wert 10 der Probe übersteigt den Wert 8.75 → er ist ein oberer Ausreisser dieser Probe



d) Berechnen Sie den Mittelwert der Absenzen. (1)

Lösung

$$Mittelwert = \frac{3\cdot 2 + 3 + 4 + 5\cdot 5 + 6 + 10}{12} = 4.5$$ 1 P

e) Berechnen Sie die Standardabweichung dieser Probe. (2)

Lösung

1 P

$$\sigma = \sqrt{\frac{(2-4.5)^2\cdot 3+(3-4.5)^2+(4-4.5)^2+(5-4.5)^2\cdot 5+(6-4.5)^2+(10-4.5)^2}{11}} = \sqrt{\frac{55}{11}} = 2.236 \approx 2.24\,Tage$$ 1 P

f) Welche Bedeutung hat die Standardabweichung? Markieren Sie die wahre Aussage mit einem Kreuz, nachdem Sie sie aufmerksam durchgelesen haben.
Werden zwei oder mehr Kreuze gesetzt, wird die Aufgabe mit 0 Punkten bewertet. (1)

- ☐ Die Standardabweichung ist die durchschnittliche Abweichung aller Werte vom Median einer Probe.
- ☐ Bekommen wir für die Standardabweichung einen kleinen Wert, so bedeutet das, dass die Werte der Probe im Durchschnitt stark um den Mittelwert streuen.
- ☐ **Die Standardabweichung ist die durchschnittliche Abweichung aller Werte vom Mittelwert einer Probe.** 1 P
- ☐ Bekommen wir für die Standardabweichung einen grossen Wert, so bedeutet das, dass die Werte der Probe im Durchschnitt stark um den Median streuen.

8. Algebraische Umformungen (____/7)

a) Vereinfachen Sie den folgenden Term so weit wie möglich und geben Sie das Ergebnis ohne negative und ohne gebrochene Exponenten an. (4)

$$\sqrt{m^3\cdot\sqrt{m^4\cdot\sqrt{m^5}}} \qquad wobei\ m \geq 0$$

Lösung

2 P 1 P 1 P

$$\sqrt{m^3\cdot\sqrt{m^4\cdot\sqrt{m^5}}} = \sqrt{m^3\cdot\sqrt{m^4\cdot m^{\frac{5}{2}}}} = \sqrt{m^3\cdot m^{\frac{4}{2}}\cdot m^{\frac{5}{4}}} = m^{\frac{3}{2}}\cdot m^{\frac{4}{4}}\cdot m^{\frac{5}{8}} = m^{\frac{25}{8}} = \boldsymbol{\sqrt[8]{m^{25}}} = \boldsymbol{m^3\cdot\sqrt[8]{m}}$$

b) Vereinfachen Sie den Logarithmusterm für beliebige aber gleiche Basen so weit wie möglich, wobei diese Basis > 0 ist und x, y > 0. (3)

$$\log_b\left(\frac{x^2}{y^5}\right) + \log_b\left(\frac{y^4}{x^3}\right) + \log_b x$$

Lösung

1 P $$\log_b\frac{x^2y^4x}{y^5x^3} = \boldsymbol{\log_b\frac{1}{y}} = \boldsymbol{\log_b y^{-1}} = \boldsymbol{-\log_b y}$$ 2 P