WIRTSCHAFTSSCHULE KV CHUR

KBO KAUFMÄNNISCHE BERUFSSCHULE OBERENGADIN

Abschlussprüfung 2017 BM2
Mathematik

Lösungen

Material Arbeitsblätter, Häuschenblätter

Hilfsmittel netzunabhängiger, nicht programmierbarer Taschenrechner, Formelblatt

Zeit 120 Minuten

Hinweise

- **Beschriften Sie alle Häuschenblätter** mit Ihrem Namen und Vornamen.
- Sie müssen nicht der Reihe nach arbeiten. Kennzeichnen Sie aber jede Aufgabe mit der entsprechenden Nummer und trennen Sie die nächste Nummer mit einer waagrechten Linie ab.
- Der Lösungsweg muss überall übersichtlich dargestellt werden; unbelegte Resultate werden nicht berücksichtigt!
- Mehrfachlösungen sind nicht gestattet; Ungültiges ist deutlich zu streichen. Die gültigen Endergebnisse sind deutlich zu kennzeichnen.
- Die Lösungen und Lösungswege sind auf die bereitgelegten Häuschenblätter zu schreiben, nur die Grafiken werden direkt auf den Aufgabenblättern erstellt.

Bewertung

Aufgabe	mögliche Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	7	
2	19	
3	7	
4	7	
5	9	
6	8	
7	13	
8	10	
8 Aufgaben	**80**	

Note: ____________

Unterschrift ExpertIn 1

____

Unterschrift ExpertIn 2

____

1. Lineares Gleichungssystem (____/7)

Bestimmen Sie die Definitions- und die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems in der Grundmenge $\mathbb{G} = \mathbb{R}\, x\, \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{c|rl|} (1) & \frac{5}{x} - \frac{2}{y} & = 1 \\ (2) & \boldsymbol{\frac{4}{x} - \frac{1}{y}} & \boldsymbol{= 2} \end{array}$$

Lösung

Definitionsmenge

$\mathbb{D}\mathrm{x} = \mathbb{R}\backslash\{0\};\ \mathbb{D}\mathrm{y} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $\boxed{1\text{ P}}$

Lösungsmenge

$(2) \cdot -2$

$(2)\ -\frac{8}{x} + \frac{2}{y} = -4$ $\boxed{1\text{ P}}$

Additionsverfahren: (1) + (2):

$\frac{5}{x} - \frac{8}{x} \quad = -3 \mid \cdot\, Hauptnenner\ x$

$5 - 8 = -3x$

$1 = x$ $\boxed{2\text{ P}}$

in (1) einsetzen

$\frac{5}{1} - \frac{2}{y} \quad = 1 \mid \cdot\, Hauptnenner\ y$

$5y - 2 = y \mid -y; +2$

$4y \quad = 2$

$y = \frac{1}{2}$ $\boxed{2\text{ P}}$

$\mathbb{L} = \left\{\left(1/\frac{1}{2}\right)\right\}$ $\boxed{1\text{ P}}$

2. Gleichungen (____/19)

a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge $\mathbb{D}$ und Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der unten folgenden Gleichung in $\mathbb{G} = \mathbb{Q}$.

$$1 - \frac{3x - 3}{6x - 15} = \frac{3x + 4}{4x - 10}$$

Lösung 1 P

$$\frac{1}{1}-\frac{3(x-1)}{3(2x-5)}=\frac{3x+4}{2(2x-5)} \rightarrow \frac{1}{1}-\frac{(x-1)}{(2x-5)}=\frac{3x+4}{2(2x-5)}$$

1 P

$HN\ 2(2x-5);\quad \mathbb{D}=\mathbb{Q}\backslash\left\{\frac{5}{2}\right\}$ 1 P

$2(2x-5)-2(x-1)=(3x+4)$ 1 P

$4x-10-2x+2=3x+4$ 1 P

$-12=x$

$\mathbb{L}=\{\mathbf{-12}\}$ 1 P

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der folgenden Logarithmengleichung in $\mathbb{G}=\mathbb{R}^+$. Die Definitionsmenge ist nicht verlangt.

$$\log_4(3x^2-9x)-\log_4 256=\log_4(6x)$$

Lösung

$\log_4(3x^2-9x)-\log_4(6x)=\log_4 256$ 1 P

$\log_4\frac{(3x^2-9x)}{6x}=4$ 2 P

$\log_4\frac{3x(x-3)}{6x}=4$ 1 P

$\log_4\frac{(x-3)}{2}=4 \rightarrow 4^4=\frac{x-3}{2} \rightarrow 256\cdot 2=x-3 \rightarrow 515=x;\quad \mathbb{L}=\{\mathbf{515}\}$

1 P 1 P 1 P

c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ und die Definitionsmenge $\mathbb{D}$ der folgenden Exponentialgleichung in $\mathbb{G}=\mathbb{Q}$.

$$3\cdot\frac{9^{x+3}}{3^x}=27$$

Lösung $\mathbb{D}=\mathbb{Q}$ 1 P

$9^{x+3}\cdot 3^{-x}=9$

$(x+3)lg9-xlg3=lg9$ 1 P

$xlg9-xlg3=lg9-3lg9$ 1 P

$x(lg9-lg3)=-2lg9$ 1 P

$x=\frac{-2lg9}{lg9-lg3}=-4;\quad \mathbb{L}=\{\mathbf{-4}\}$ 1 P

1 P

$9^{x+3}\cdot 3^{-x}=9$ 1 P

$3^{2(x+3)}\cdot 3^{-x}=9$ 1 P

$3^{2x+6-x}=3^2$

$3^{x+6}=3^2$ 1 P

$\rightarrow\quad x+6=2; x=-4;\ \mathbb{L}=\{\mathbf{-4}\}$

1 P 1 P

3. Textaufgabe (____/7)

Die Gewinnanteile der beiden Gesellschafter A und B der Firma Fixundfertig verhalten sich wie 10:7. Da A im Laufe des Geschäftsjahres CHF 11'200.— privat entnommen hat und B CHF 16'800.— in die Firma eingezahlt hat, verhalten sich die Anteile nun genau umgekehrt. Wie hoch sind die Gewinnanteile der Gesellschafter A und B und wie hoch ist der Geschäftsgewinn der Firma?

Hinweis: Runden Sie die Zwischenergebnisse auf 5 Rappen genau.

Lösung

A = x, B = y

(1) $\frac{x}{y} = \frac{10}{7}$ $\boxed{1\text{ P}}$

(2) $\frac{x-11\,200}{y+16\,800} = \frac{7}{10}$ $\boxed{1\text{ P}}$

(1) $7x = 10y$

$7x - 10y = 0$

(2) $10x - 112\,000 = 7y + 117\,600$ $\boxed{1\text{ P}}$

$10x - 7y = 229\,600$

(1) $\cdot (-10)$

(2) $\cdot 7$

(1) $-70x + 100y = 0$

(2) $70x - 49y = 1\,607\,200$ $\boxed{1\text{ P}}$

Additionsverfahren (1) + (2)

$100y - 49y = 1\,607\,200$

$51y = 1\,607\,200$

$y = 31\,513.75$ (TR: 31 513.72549) $\boxed{1\text{ P}}$

in (1) einsetzen:

$7x - 315\,137.5 = 0$

$7x = 315\,137.5$

$x = 45\,019.65$ $\boxed{1\text{ P}}$

A = 45’019.65 CHF

B = 31’513.75 CHF $\boxed{\text{1 P, falls alles korrekt, ansonsten 0 P}}$

Firmengewinn: 76’533.40 CHF

4. Quadratische Funktionen (____/7)

Nach dem Atomausstieg in Deutschland muss ein Kraftwerk zurückgebaut werden. Für die schwach radioaktiven Stoffe wird an einer senkrechten Felswand eine tiefe und fest abgedichtete Grube ausgehoben. Der Grubenquerschnitt ist parabelförmig (sehen Sie die Skizze!) und folgt der Funktionsgleichung $p: y = \frac{1}{4}x^2 - 10x$.

a) Wie breit ist die Grube?

Lösung

$\boxed{1\text{ P}}$ $\boxed{1\text{ P}}$

$0 = \frac{1}{4}x^2 - 10x \quad \rightarrow 0 = \frac{1}{4}x(x-40) \quad \rightarrow N_1(0\backslash 0); N_2(40\backslash 0)$

Die Grube ist 40 Meter breit $\boxed{1\text{ P}}$

b) Wie tief ist sie an ihrer tiefsten Stelle?

Lösung

$\boxed{1\text{ P}}$ $\boxed{1\text{ P}}$

$S(-\frac{-10}{2\cdot\frac{1}{4}}\backslash 0 - \frac{(-10)^2}{4\cdot\frac{1}{4}} \rightarrow S(20\backslash -100)$ Die Grube ist 100 Meter tief.

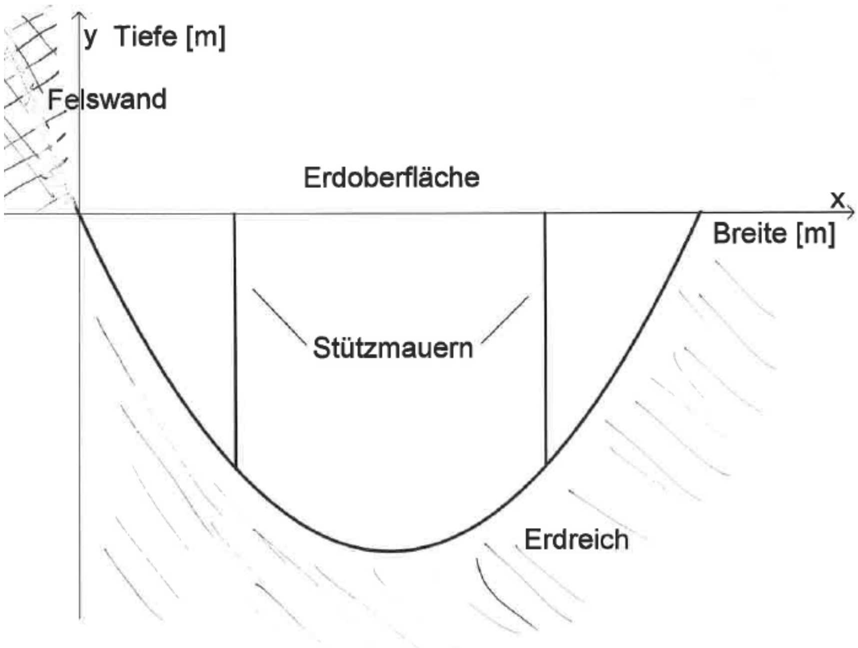
oder $x = (0+40):2 \rightarrow S(20/\frac{1}{4}\cdot 20(20-40) \rightarrow S(20/-100)$

c) Die zwei Stützmauern sind jeweils 10 Meter vom Rand der Grube entfernt erstellt worden. Wie hoch sind diese also, wenn sie genau bis zur Erdoberfläche ragen?

Lösung $\boxed{1\text{ P}}$

$y = \frac{1}{4}\cdot 10^2 - 10\cdot 10 = -75$

Die Mauern sind 75 Meter hoch. $\boxed{1\text{ P}}$



5. Finanzmathematik/Rentenrechnung (____/9)

a) Ein Familienvater zahlte bei seiner Bank am Jahresende der Jahre 2010 und 2011 den gleichbleibenden Betrag von je CHF 10'000.— auf ein Sparkonto ein. Der Zinssatz beträgt bis zum Ende des Jahres 2013 1.25%, danach nur noch 1%.
Welches Guthaben hat er bis Ende des Jahres 2016 angespart, wenn er nach den beiden Einzahlungen weder Ein- noch Auszahlungen getätigt hat?

Lösung 1 P 1 P 1 P

$10'000 \cdot 1.0125^3 \cdot 1.01^3 + 10'000 \cdot 1.0125^2 \cdot 1.01^3 = 21'256.41 = CHF\ 21'256.40$

$oder\ 10'000 \cdot 1.0125 + 10'000 = 20'125 \rightarrow 20'125 \cdot 1.0125^2 \cdot 1.01^3 = 21'256.41 = 21'256.40$

b) Eine moderne Abfüllanlage in der Mosterei kostete neu CHF 284'000.—. Sie soll mit einem Satz von 8.5% degressiv abgeschrieben werden. Wie viele Jahre dauert es, bis die Anlage den Buchwert von CHF 20'000.— erstmals unterschreitet?

Lösung 1 P 1 P 1 P

$$n = \frac{lg20'000 - lg284'000}{lg0.915} = 29.86 \rightarrow Es\ dauert\ 30\ Jahre$$

c) Paula nimmt für Ihr neues Computergeschäft einen Kredit von CHF 240'000.— auf. Es ist abgemacht, dass sie den Kredit in monatlichen, nachschüssigen Raten abbezahlen soll. Da es sich um ein Startup-Unternehmen handelt, bekommt sie das Geld für den günstigen Zinssatz von 3.6%. Wie hoch ist die monatliche Rate, wenn Paula den Kredit in 15 Jahren vollständig zurückbezahlt haben will?

Lösung 1 P 1 P 1 P

$$m = 12; n = 15;\ q_u = 1 + \frac{3.6}{12 \cdot 100}$$

$$r = 240'000 \cdot \frac{1.003^{12\cdot15} \cdot (1.003-1)}{1.003^{12\cdot15}-1} = 240'000 \cdot 0.007198 = 1'727.528 = CHF\ 1'727.55$$

6. Lineare Funktionen (____/8)

Ein renommierter Whiskyproduzent hat eine Markforschung in Auftrag gegeben, um den Zusammenhang zwischen Der Anzahl der Flaschen und dem Preis pro Flasche zu ergründen. Auf dem Markt wird für die einzelne Flasche einer Whiskysorte ein Maximalpreis von CHF 575.— erzielt und für die Sättigungsmenge wurden 250 Flaschen ermittelt. Der Mindestpreis beträgt CHF 425.— pro Flasche und die Steigung der Angebotsfunktion beträgt 1.25.

a) Bestimmen Sie die Nachfrage- und die Angebotsfunktion, welche beide linear verlaufen.

Lösung

Punkt 1 (0/575)

Punkt 2 (250/0) $\boxed{1\text{ P}}$

Steigung: $m = \frac{575-0}{0-250} = -2.3$ $\boxed{1\text{ P}}$

$y_N = -2.3x + 575$

Angebotsfunktion:

$y_A = 1.25x + 425$ $\boxed{1\text{ P}}$

Für die Aufgaben b) und c) benutzen Sie bitte folgende Funktionen:

$y_N = -3x + 600 \; und \; y_A = \frac{3}{2}x + 150$

b) Zeichnen Sie die Graphen der beiden Funktionen ins folgende Koordinatensystem ein. Folgende Beschriftungen müssen in Ihrer Abbildung vorkommen: Angebot, Nachfrage, Marktgleichgewicht inklusive Koordinatenangabe.

Lösung

Nachfragefunktion: korrekte Darstellung 1 P

Angebotsfunktion: korrekte Darstellung 1 P

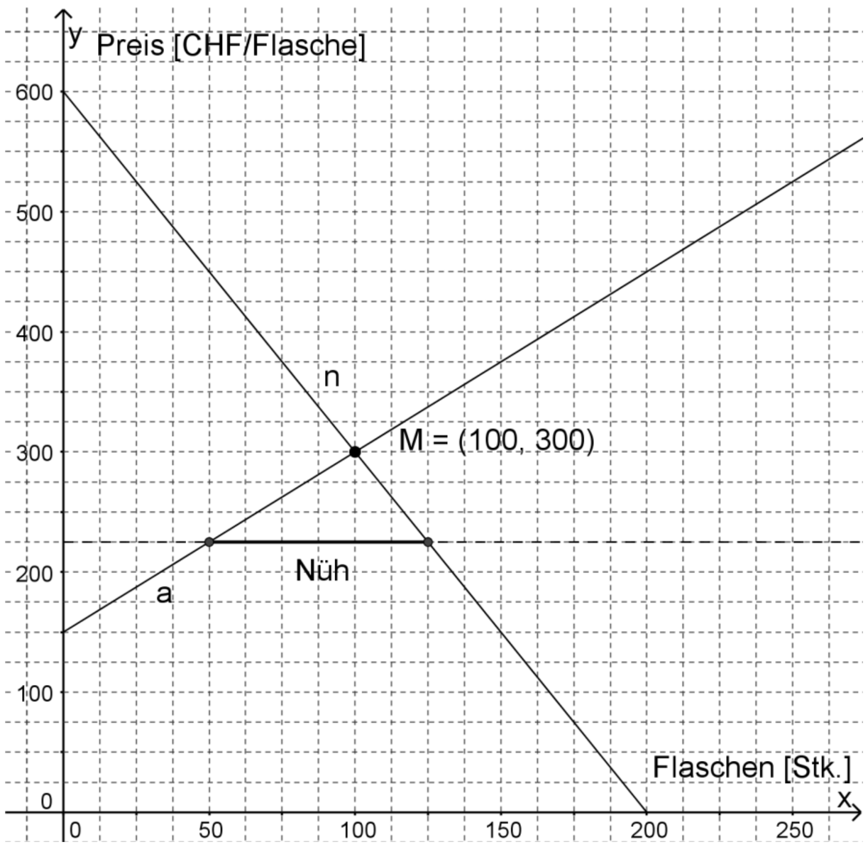
Marktgleichgewicht: korrekt eingezeichnet und Koordinaten dazugeschrieben. 2 P

$-3x + 600 = 1.5x + 150$

$450 = 4.5x; \quad x = 100$

in $y_N = -300 + 600 = 300$

Marktgleichgewicht (100/300)



c) Nun wird der Preis auf CHF 225.— pro Flasche festgelegt. Wie gross ist jetzt der Nachfrage- bzw. der Angebotsüberhang? Zeichnen Sie die Situation ins Koordinatensystem ein und lesen Sie aus der Grafik ab!

Lösung 1 P

Nachfrageüberhang: $125 - 50 = 75$ Flaschen

7. Datenanalyse (____/13)

Die Ergebnisse einer Umfrage unter zwanzig Schülerinnen und Schülern (SuS) einer vierten Primarklasse zum wöchentlichen Taschengeld sind im folgenden Säulendiagramm verarbeitet.

Lösung

a) Damit Sie eine bessere Übersicht erhalten, füllen Sie die Daten der Grösse nach in die vorbereitete Tabelle ein. Beginnen Sie mit dem kleinsten Wert.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
0	0	0	0	3	3	3	3	3	5	5	5	5	5	5	7	7	7	7	12

1 P; pro Fehler 0.5 Abzug

b) Notieren Sie die absoluten Werte in die entsprechende Tabelle und berechnen Sie dann die relative Häufigkeit. Die gefundenen Werte füllen Sie in die nachfolgende Tabelle ein.

Taschengeld in CHF	0.-	1.-	2.-	3.-	4.-	5.-	6.-	7.-	8.-	9.-	10.-	11.-	12.-
Absolute Häufigkeit	4	0	0	5	0	6	0	4	0	0	0 1 P	0	1
Relative Häufigkeit	20	0	0	25	0	30	0	20	0	0	0	0	5

2 P; pro Fehler 0.5 Abzug

c) Bestimmen Sie den Durchschnitt, den Median, die Quartile 1 und 3 und die Standardabweichung zur vorgegebenen Datenliste.

Durchschnitt $= \frac{4 \cdot 0 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 5 + 4 \cdot 7 + 1 \cdot 12}{4+5+6+4+1} = 4.25$ 1 P

Median $= \frac{5+5}{2} = 5$ (Bei 20 Stichproben der Durchschnitt des 10. und des 11. Wertes.) 1 P

1. Quartile $= \frac{3+3}{2} = 3$ (Bei 20 Stichproben der Durchschnitt des 5. und des 6. Wertes.) 1 P

3. Quartile $= \frac{5+7}{2} = 6$ (Bei 20 Stichproben der Durchschnitt des 15. und des 16. Wertes.) 1 P

Varianz $= \frac{(0-4.25)^2 \cdot 4 + (3-4.25)^2 \cdot 5 + (5-4.25)^2 \cdot 6 + (7-4.25)^2 \cdot 4 + (12-4.25)^2}{20} = 8.6875$ 1 P

1 P

Standardabweichung $= \sqrt{8.6875} = 2.9474 \ldots = 2.95$ 1 P

d) Welcher der folgenden drei Boxplots gehört zum gegebenen Säulendiagramm? Begründen Sie.

Es ist B. 1 P

Da der Median in unserer Datenreihe 5 ist, können alle drei Boxplots zu unserer Datenreihe gehören.
Die dritte Quartile ist 6, so dass Boxplot A ausgeschlossen werden kann.
C kann auch ausgeschlossen werden, denn der grösste Wert ist 7, in unserer Datenreihe ist der grösste Wert aber 12.
Der Interquartilsabstand ist 6 – 3 = 3. 1 P
Deshalb ist der Wert CHF 12.- ein Ausreisser, weil CHF 7 + 1.5 · CHF 3 = CHF 7 + CHF 4.5 = CHF 11.5 und kleiner als CHF 12.-ist.

8. Algebraische Umformungen (____/10)

a) Vereinfachen Sie den folgenden Term so weit wie möglich und geben Sie das Ergebnis ohne gebrochene und ohne negative Exponenten.

$$\frac{\sqrt[4]{a^8 \cdot \sqrt[3]{a^6}}}{a^3}$$

Lösung

2 P 1 P 1 P

$$\frac{\sqrt[4]{a^8\cdot\sqrt[3]{a^6}}}{a^3} = \frac{\sqrt[4]{a^8\cdot a^{\frac{6}{3}}}}{a^3} = \frac{\sqrt[4]{a^8\cdot a^2}}{a^3} = \frac{\sqrt[4]{a^{8+2}}}{a^3} = \frac{\sqrt[4]{a^{10}}}{a^3} = \frac{a^{\frac{10}{4}}}{a^3} = a^{\frac{5}{2}-3} = a^{\frac{5-6}{2}} = a^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{a}}}$$ 1 P

b) Berechnen Sie folgenden Term, fassen Sie zu einem Bruch zusammen und vereinfachen Sie so weit wie möglich.

$$\frac{a-b}{a} - \frac{a-b}{a+b} + \frac{b^2}{a^2+ab}$$

Lösung

1 P 1 P 1 P

$$\frac{\boldsymbol{a-b}}{\boldsymbol{a}} - \frac{\boldsymbol{a-b}}{\boldsymbol{a+b}} + \frac{\boldsymbol{b^2}}{\boldsymbol{a(a+b}} = \frac{\boldsymbol{(a+b)(a-b)-a(a-b)+b^2}}{\boldsymbol{a(a+b)}} = \frac{\boldsymbol{a^2-b^2-a^2+ab+b^2}}{\boldsymbol{a\cdot(a+b)}} = \frac{\boldsymbol{ab}}{\boldsymbol{a(a+b)}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a+b}}$$ 1 P

1 P