WIRTSCHAFTSSCHULE KV CHUR

KBO KAUFMÄNNISCHE BERUFSSCHULE OBERENGADIN

Abschlussprüfung 2016 BM2
Mathematik

Lösungen

Material Arbeitsblätter, Häuschenblätter

Hilfsmittel netzunabhängiger, nicht programmierbarer Taschenrechner, Formelblatt

Zeit 120 Minuten

Hinweise

- **Beschriften Sie alle Häuschenblätter** mit Ihrem Namen und Vornamen.
- Sie müssen nicht der Reihe nach arbeiten. Kennzeichnen Sie aber jede Aufgabe mit der entsprechenden Nummer und trennen Sie die nächste Nummer mit einer waagrechten Linie ab.
- Der Lösungsweg muss überall übersichtlich dargestellt werden; unbelegte Resultate werden nicht berücksichtigt!
- Mehrfachlösungen sind nicht gestattet; Ungültiges ist deutlich zu streichen. Die gültigen Endergebnisse sind deutlich zu kennzeichnen.
- Die Lösungen und Lösungswege sind auf die bereitgelegten Häuschenblätter zu schreiben, nur die Grafiken werden direkt auf den Aufgabenblättern erstellt.

Bewertung

Aufgabe	mögliche Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	10	
2	17	
3	11	
4	7	
5	6	
6	13	
7	10	
8	6	
8 Aufgaben	**80**	

Note: ____________

Unterschrift ExpertIn 1

____

Unterschrift ExpertIn 2

____

1. Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen (___/10)

Bestimmen Sie die die Definitions- und die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems in der Grundmenge $\mathbb{G} = \mathbb{R}\, x\, \mathbb{R}$:

$$\left| \begin{array}{c} \frac{x}{x-2} - 1 = \frac{8}{5-3y} \\ \frac{2x-5}{4x-1} = \frac{y+2}{2y+1} \end{array} \right|$$

Lösung:

(1) $\frac{x}{x-2} - 1 = \frac{8}{5-3y}$ $D_x = R\backslash\left\{2/\frac{1}{4}\right\}$, $D_y = R\backslash\left\{\frac{5}{3}/-\frac{1}{2}\right\}$ 2

$x(5-3y) - (x-2)(5-3y) = 8(x-2)$
$5x - 3xy - 5x + 3xy + 10 - 6y = 8x - 16$
$26 = 8x + 6y$
$\mathbf{13 = 4x + 3y}$ 3

(2) $\frac{2x-5}{4x-1} = \frac{y+2}{2y+1}$
$4xy + 2x - 10y - 5 = 4xy - y + 8x - 2$
$-3 = 6x + 9y$
$(\mathbf{2})$ $\mathbf{-1 = 2x + 3y}$ 2
$(\mathbf{1})$ $\mathbf{13 = 4x + 3y}$

$(1)-(2)$ $14 = 2x;$ $x = 7$ 2
in (2) $13 = 4 \cdot 7 + 3y;$ $y = -5$ $\mathbb{L} = \{(\mathbf{7}/\mathbf{-5})\}$ 1

2. Gleichungen und Ungleichungen (___/17)

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der folgenden Wurzelgleichung in $\mathbb{G} = \mathbb{R}$.
(Die Definitionsmenge ist nicht verlangt.) (6)

$$\sqrt{2x} - \sqrt{\frac{1}{2}x} = 3$$

Lösung:

$\sqrt{2x} - \sqrt{\frac{1}{2}x} = 3$ $/(\ \ )^2$

$2x - 2 \cdot \sqrt{2x} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}x} + \frac{x}{2} = 9$ $/\cdot 2$ 1

$4x - 4 \cdot \sqrt{2x} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}x} + x = 18$ $/-5x$

$-4 \cdot \sqrt{2x} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}x} = 18 - 5x$ $/\cdot(-1)$

$4 \cdot \sqrt{2x} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}x} = 5x - 18$ $/(\ \ )^2$ 1

$16 \cdot 2x \cdot \frac{x}{2} = 25x^2 - 180x + 324$ $/-16x^2$ 1

$0 = 9x^2 - 180x + 324 = x^2 - 20x + 36 = (x-2)(x-18)$ 1

$x_1 = 2;$ *Probe*: $\sqrt{2 \cdot 2} - \sqrt{0.5 \cdot 2} = 3 \rightarrow 2 - 1 = 3$ *falsch*

$x_2 = 18;$ *Probe*: $\sqrt{2 \cdot 18} - \sqrt{0.5 \cdot 18} = 3 \rightarrow 6 - 3 = 3$ *stimmt* 1 $\mathbb{L} = \{\mathbf{18}\}$

1

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der folgenden Exponentialgleichung in $\mathbb{G} = \mathbb{R}$. (5)

$$25 = 5^{-x} \cdot \frac{25^x}{125^4}$$

Lösung:

$$25 = 5^{-x} \cdot \frac{25^x}{125^4}$$

$$5^2 = 5^{-x} \cdot \frac{(5^2)^x}{(5^3)^4} \quad 1$$

$$5^2 = 5^{-x} \cdot \frac{5^{2x}}{5^{12}} \quad 1$$

$$5^2 = 5^{-x+2x-12} = 5^{x-12} \quad 1$$

$$\rightarrow 2 = x - 12 \rightarrow x = 14 \quad 1 \qquad \mathbb{L} = \{\mathbf{14}\} \quad 1$$

c) Geben Sie den Definitionsbereich $\mathbb{D}$ und die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der folgenden Ungleichung in $\mathbb{G} = \mathbb{Z}$ an. (6)

$$\left(3x - \frac{1}{3x}\right) \cdot 4x \geq (2x+5)^2 - x \cdot (5 - 8x)$$

Lösung:

$$\left(3x - \frac{1}{3x}\right) \cdot 4x \geq (2x+5)^2 - x \cdot (5 - 8x) \qquad \mathbb{D} = \mathbb{Z}\backslash\{\mathbf{0}\} \quad 1$$

$$12x^2 - \frac{4x}{3x} \geq 4x^2 + 2 \cdot 2x \cdot 5 + 25 - 5x + 8x^2$$

$$\cancel{12x^2} - \frac{4}{3} \geq \cancel{12x^2} + 15x + 25 \quad 2$$

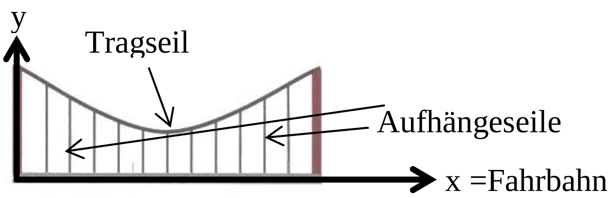
$$-4 \geq 45x + 75 \quad 1$$

$$-79 \geq 45x$$

$$1 \quad x \leq -\frac{79}{45} \leq -1.755 \quad \rightarrow \mathbb{L} = \{-\mathbf{2}; -\mathbf{3}; -\mathbf{4}; \dots\dots\} \quad 1$$

3. Quadratische Funktionen (___/11)

Die Funktion $y = \frac{1}{180}x^2 - \frac{1}{3}x + 10$ beschreibt die Form des Tragseils einer Hängebrücke gemäss untenstehender Skizze, wobei x und y Distanzen in Metern bedeuten.



a) Wie viele Meter hängt das Tragseil an seiner tiefsten Stelle über der Fahrbahn? (3)

b) In welcher Distanz zur Brückenmitte befinden sich die Aufhängeseile, die genau 8,042 Meter hoch sind? (4)

c) Gegeben sei die Exponentialfunktion $\boldsymbol{y = 2^{\frac{1}{2}x}}$ ($\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$). Bilden Sie die Umkehrfunktion und zeichnen Sie diese in das unten folgende Koordinatensystem ein. (4)

Lösungen:

a) Scheitelpunkt berechnen:

$y = \frac{1}{180}x^2 - \frac{1}{3}x + 10$

a = 1/180, b = -1/3, c = 10

$S(\frac{-b}{2a} \mid c - \frac{b^2}{4a})$

$S(\frac{-(-\frac{1}{3})}{2 \cdot \frac{1}{180}} \mid 10 - \frac{(-\frac{1}{3})^2}{4 \cdot \frac{1}{180}})$

S(30 | 5) 2

1

Die Brücke hängt an ihrer tiefsten Stelle **5 m** oberhalb der Fahrbahn.

---

b) x-Wert berechnen:

$y = \frac{1}{180}x^2 - \frac{1}{3}x + 10$

$8.042 = \frac{1}{180}x^2 - \frac{1}{3}x + 10$

$0 = \frac{1}{180}x^2 - \frac{1}{3}x + 1.958$ 1

a = 1/180, b = -1/3, c = 1.958

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x_1 = \frac{\frac{1}{3} + \sqrt{0{,}0676}}{2 \cdot \frac{1}{180}} = 53.4$ 1

$x_1 = \frac{\frac{1}{3} - \sqrt{0{,}0676}}{2 \cdot \frac{1}{180}} = 6.6$ 1

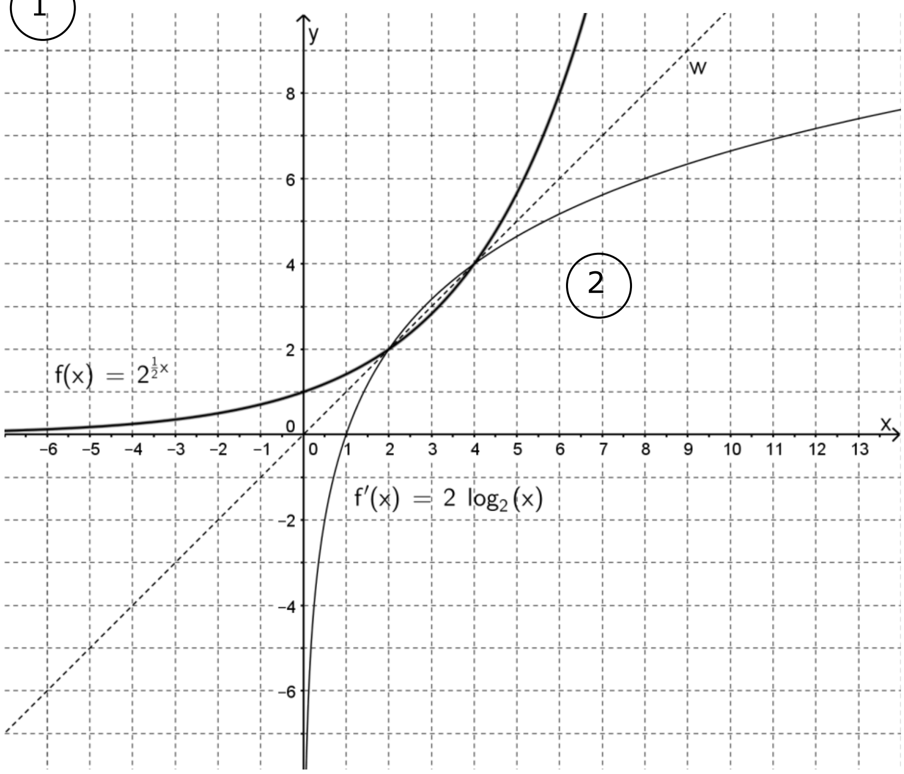
1

8,042 m hohe Aufhängevorrichtungen befinden sich **23,4 m** vor und 23,4 m nach der Brückenmitte.

---

c) $y = 2^{\frac{1}{2}x} \rightarrow x = 2^{\frac{1}{2}y} \rightarrow \lg(x) = \frac{1}{2}y \cdot \lg(2) \rightarrow \frac{\lg(x)}{\lg(2)} = \frac{1}{2}y \rightarrow \boldsymbol{y = 2\,log_2(x)}$ 1

1



4. Finanzmathematik (___/7)

a) Welches Kapital muss eine Stiftung anlegen, wenn sie in 10 Jahren ein ungefähres Stiftungsvermögen von CHF 500‘000.— angehäuft haben will und sie mit einem Zinssatz von 0.75% rechnen kann (runden Sie auf CHF 1’000.— genau)? (2)

b) Ein Kapital von CHF 25‘000.— wird fest zu 1.25% verzinst. Nach 15 Jahren wird eine Einzahlung gemacht. Danach läuft das Konto weitere 5 Jahre. Damit hat sich ein Vermögen von CHF 40‘000.05 angehäuft. Wie hoch war die Einzahlung? (3)

c) Wie viele Jahre muss ein Kapital von CHF 1‘000.— zu 1.125% verzinst werden, damit es auf CHF 1293.45 anwächst. (2)

Lösung:

a) $k_0 = \frac{500'000}{1.0075^{10}} = 464'001.58$ 1 Es müssen CHF 464‘000.— angelegt werden. 1

b) $k_{15} = 25'000 \cdot 1.0125^{15} = 30'120.75$ 1

$k_0 = \frac{40000.05}{1.0125^5} = 37'591.15$ 1 Die Einzahlung betrug CHF 7‘470.40. 1

c) $n = \frac{lg1292.45 - lg1000}{lg1.01125} = 22.9316$ 1 Es muss 23 Jahre angelegt werden. 1

5. Textaufgaben (___/6)

Eine Badewanne kann durch eine Kaltwasser- sowie eine Warmwasserzuleitung gefüllt und durch den Ablauf entleert werden. Ist bei geschlossenem Abfluss nur die Kaltwasserleitung offen, dauert das Füllen der leeren Badewanne 15 Minuten, die Warmwasserleitung alleine füllt die leere Badewanne in 12 Minuten. Der Ablauf alleine entleert die volle Badewanne in 20 Minuten.
Nun wird die leere Badewanne bei geschlossenem Ablauf durch die voll aufgedrehten beiden Zuleitungen gefüllt. Weil das Badewasser zu heiss ist, wird in den letzten drei Minuten die Heisswasserzuleitung geschlossen und dafür der Abfluss maximal geöffnet. Wie lange dauert so das Füllen der Badewanne? Lösen Sie mit Hilfe einer Gleichung.

Lösung:

	Füllzeit Entleerungszeit	Anteil pro Min	Dauer in Minuten	
Kaltwasserzuleitung	15 Min.	$\frac{1}{15}$	X+3	1
Warmwasserzuleitung	12 Min.	$\frac{1}{12}$	x	
Abfluss	20 Minuten	$\frac{1}{20}$	3	

$\frac{x}{15} + \frac{x}{12} + \frac{3}{15} - \frac{3}{20} = 1 \quad /\cdot 60$ 2

$4x + 5x + 12 - 9 = 60$ 1 1

$9x = 57; \qquad x = 6.33$

Das Füllen der Badewanne dauert 9.33 Minuten. 1

6. Lineare Funktionen (___/13)

In Ihrem letzten Urlaub haben Sie viele tolle Fotos geschossen. Einige von diesen möchten Sie nun als Fotoposter an die Wand hängen.
Bei fotocolor.ch kostet ein solches Poster im Format 35x50 cm CHF 12.—. Für eine Bestellung ab 10 solchen Ausdrucken offeriert Ihnen fotocolor.ch einen Rabatt von 37.5% auf jedes bestellte Poster.
Bei printpicture.ch bezahlen Sie für 4 Poster CHF 38.— und für 12 Poster CHF 94.—.

a) Geben Sie die Funktionsgleichungen für die Angebote von fotocolor.ch und printpicture.ch an. (6)

b) Zeichnen Sie anschliessend diese Funktionsgleichungen ins folgende Koordinatensystem ein. (4)

c) fotocolor.ch: Ab welcher Anzahl lohnt es sich schon, auf das Angebot mit den 37.5% Rabatt umzusteigen, anstatt den anderen Tarif zu zahlen? (1)

d) Für welche Anzahl an Postern ist printpicture.ch günstiger als fotocolor.ch? Lesen Sie aus Ihrer Grafik ab oder berechnen Sie! (2)

Lösung:

a) Sei x die Anzahl Poster und y der Preis in CHF:

fotocolor.ch

$y_f = 12x$ für $0 \leq x < 10$ 3

$y_f = 7.5x$ für $x \geq 10$

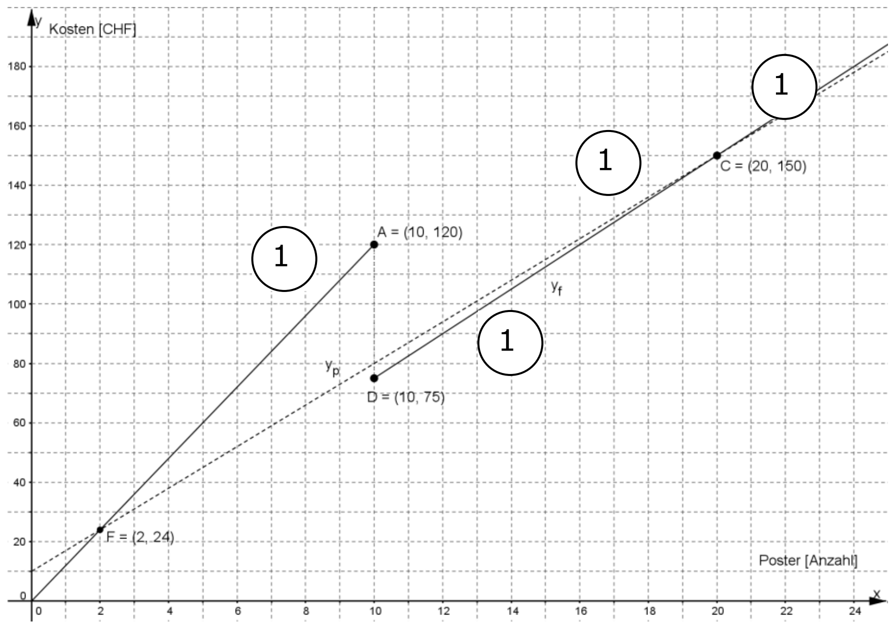
printpicture.ch

$m = \frac{94-38}{12-4} = \frac{56}{8} = 7$ 1

$38 = 4 \cdot 7 + b; b = 10$ 1

$y_p = 7x+10$ 1

b)



c) fotocolor.ch Angebot 2: Start bei 10 Postern $y_f = 10 \cdot 7.5 = 75$ 1

Schnittpunkt: $y_f = 75 = 12x$; $x = 6.25$. Ab 7 Poster schon Angebot 2 wählen.

1

d) printpicture ist zwischen 2 und 9 und dann ab 20 Postern günstiger. 1

7. Algebraische Umformungen (____/10)

a) Vereinfachen Sie den folgenden Logarithmus-Term so weit wie möglich: (5)

$$lg(1'000uv^4) - lg\sqrt{u} - lg(10v^2)$$

b) Vereinfachen Sie und geben Sie das Ergebnis ohne negative und ohne gebrochene Exponenten an. (5)

$$\frac{\sqrt[4]{a^7 \cdot \sqrt[3]{a^5}} \cdot \sqrt[50]{a^{-180}}}{a^{-2} \cdot a^{\frac{3}{5}}}$$

Lösungen:

a)

$lg(1'000uv^4) - lg\sqrt{u} - lg(10v^2) = lg\left(\frac{1'000uv^4}{\sqrt{u} \cdot 10v^2}\right) = lg\left(\frac{100uv^2}{u^{\frac{1}{2}}}\right) = lg\left(10^2 \cdot u^{\frac{1}{2}} \cdot v^2\right) = 2 \cdot lg10 + lg\left(u^{\frac{1}{2}}v^2\right) = \mathbf{2 + lg\left(u^{\frac{1}{2}}v^2\right) = 2 + \frac{1}{2} \cdot lgu + 2 \cdot lgv}$

1 1 1 1 2

oder

$lg(1'000uv^4) - lg\sqrt{u} - lg(10v^2) = lg1'000 + lgu + 4 \cdot lgv - lg\left(u^{\frac{1}{2}}\right) - (lg10 + 2 \cdot lgv) = 3 + lgu + 4 \cdot lgv - \frac{1}{2} \cdot lgu - 1 - 2 \cdot lgv = \mathbf{2 + \frac{1}{2} \cdot lgu + 2 \cdot lgv}$ 2

oder falls die Klammer vergessen wird

$lg(1'000uv^4) - lg\sqrt{u} - lg(10v^2) = lg1'000 + lgu + 4 \cdot lgv - lg\left(u^{\frac{1}{2}}\right) - lg10 + 2 \cdot lgv$ 1

$= 3 + lgu + 4 \cdot lgv - \frac{1}{2} \cdot lgu - 1 + 2 \cdot lgv = \mathbf{2 + \frac{1}{2} \cdot lgu + 6 \cdot lgv}$ 2

b) $\frac{\sqrt[4]{a^7 \cdot \sqrt[3]{a^5}} \cdot \sqrt[50]{a^{-180}}}{a^{-2} \cdot a^{\frac{3}{5}}} = \frac{\sqrt[4]{a^7 \cdot a^{\frac{5}{3}}} \cdot a^{-\frac{180}{50}}}{a^{-2} \cdot a^{\frac{3}{5}}} = \frac{a^{\frac{7}{4}} \cdot a^{\frac{5}{12}} \cdot a^{-\frac{18}{5}}}{a^{-2} \cdot a^{\frac{3}{5}}} = a^{\frac{7}{4}+\frac{5}{12}-\frac{18}{5}+2-\frac{3}{5}} = a^{-\frac{1}{30}} = \sqrt[30]{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt[30]{\mathbf{a}}}$

1 1 1 1 1

8. Datenanalyse (____/6)

Folgende Tabelle zeigt die Leistungen einer Klasse bei einer Prüfung in Mathematik.

Note	6	5.5	5	4.5	4	3.5	3	2.5	2	1.5	1
Anzahl Prüfungen	2	0	5	6	3	4	2	0	0	0	1

a) Bestimmen Sie das arithmetische Mittel (auf Hundertstel genau) und den Median der Prüfungsergebnisse. (2)

b) Bestimmen Sie die Standardabweichung der Daten (auf Hundertstel genau). (4)

Lösungen:

a) $Durchschnitt: \frac{2\cdot 6+5\cdot 5+6\cdot 4.5+3\cdot 4+4\cdot 3.5+2\cdot 3+1\cdot 1}{23} = \frac{97}{23} = 4.217 = \mathbf{4.22}$ 1

$Median = 12. Wert = \mathbf{4.5}$ 1

b) Varianz: 2

$$\frac{2\cdot(6-4.22)^2+5\cdot(5-4.22)^2+6\cdot(4.5-4.22)^2+3\cdot(4-4.22)^2+4\cdot(3.5-4.22)^2+2\cdot(3-4.22)^2+1\cdot(1-4.22)^2}{23} =$$

$$\frac{25.4132}{23} = 1.10492$$ 1

Standardabweichung: $\sqrt{1.10492} = 1.051 = \mathbf{1.05}$ 1