WIRTSCHAFTSSCHULE KV CHUR

Abschlussprüfung 2015
Mathematik

Lösungen

Material Arbeitsblätter, Häuschenblätter

Hilfsmittel netzunabhängiger, nicht programmierbarer Taschenrechner, Formelblatt

Zeit 150 Minuten

Hinweise

- **Beschriften Sie alle Häuschenblätter** mit Ihrem Namen und Vornamen.
- Sie müssen nicht der Reihe nach arbeiten. Kennzeichnen Sie aber jede Aufgabe mit der entsprechenden Nummer und trennen Sie die nächste Nummer mit einer waagrechten Linie ab.
- Der Lösungsweg muss überall übersichtlich dargestellt werden; unbelegte Resultate werden nicht berücksichtigt!
- Mehrfachlösungen sind nicht gestattet; Ungültiges ist deutlich zu streichen. Die gültigen Endergebnisse sind deutlich zu kennzeichnen.
- Die Lösungen und Lösungswege sind auf die bereitgelegten Häuschenblätter zu schreiben, nur die Grafiken werden direkt auf den Aufgabenblättern erstellt.

Bewertung

Aufgabe	mögliche Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	10	
2	16	
3	16	
4	16	
5	7	
6	7	
7	15	
8	13	
8 Aufgaben	**100**	

Note: ____________

Unterschrift ExpertIn 1

____

Unterschrift ExpertIn 2

____

1. Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen (___/10)

Bestimmen Sie die Definitionsmenge und die Lösungsmenge des folgenden Gleichungs-systems in der Grundmenge $\mathbb{G} = \mathbb{Q}\ x\ \mathbb{Q}$:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{5}{2x-6} + \frac{3}{2y+5} = \frac{7}{2} \\ \frac{6}{x-3} - \frac{1}{10y+25} = 1 \end{array} \right|$$

Lösung:

$D_x = Q\backslash\{3\} \quad D_y = Q\backslash\left\{-\frac{5}{2}\right\}$ 2

$$\left| \begin{array}{l} \frac{5}{2(x-3)} + \frac{3}{2y+5} = \frac{7}{2} \\ \frac{6}{x-3} - \frac{1}{5(2y+5)} = 1 \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{l} \frac{5}{10(x-3)} + \frac{3}{5(2y+5)} = \frac{7}{10} \\ \frac{18}{x-3} - \frac{3}{5(2y+5)} = 3 \end{array} \right| \rightarrow \text{2} \quad \frac{5}{10(x-3)} + \frac{18}{x-3} = \frac{37}{10} \quad \text{1}$$

$\rightarrow \quad 5 + 180 = 37x - 111$ 1 $\rightarrow \quad 296 = 37x \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{8 = x}$ 1

$\frac{1}{2} + \frac{3}{2y+5} = \frac{7}{2}$ 1 $\rightarrow \quad \frac{3}{2y+5} = \frac{3}{1} \rightarrow \quad 3 = 6y + 15 \quad \rightarrow \quad -12 = 6y$

$\rightarrow \quad \boldsymbol{y = -2}$ 1 $\quad \boldsymbol{L = \{(8|-2)\}}$ 1

2. Gleichungen und Ungleichungen (___/16)

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Wurzelgleichung mit $\mathbb{G} = \mathbb{R}$.

$$\sqrt{2x+5} + \sqrt{4x+3} = \sqrt{7-4x}$$

Lösung:

$$\sqrt{2x+5} + \sqrt{4x+3} = \sqrt{7-4x}$$

$2x + 5 + 2\sqrt{2x+5}\sqrt{4x+3} + 4x + 3 = 7 - 4x$ 1

$$2\sqrt{2x+5}\sqrt{4x+3} = -10x - 1 \quad \text{1}$$
$$4(2x+5)(4x+3) = 100x^2 + 20x + 1 \quad \text{1}$$
$$32x^2 + 24x + 80x + 60 = 100x^2 + 20x + 1$$

$$0 = 68x^2 - 84x - 59 \quad \text{1}$$
$$x_{1;2} = \frac{84 \pm \sqrt{84^2 - 4 \cdot 68 \cdot -59}}{2 \cdot 68} = \frac{84 \pm 152}{136}$$
$$x_1 = \frac{59}{34}; \quad x_2 = -\frac{1}{2} \quad \text{1}$$

Probe: $\sqrt{2 \cdot \frac{59}{34} + 5} + \sqrt{4 \cdot \frac{59}{34} + 3} = \sqrt{7 - 4 \cdot \frac{59}{34}};\ falsch$

$\sqrt{2 \cdot -\frac{1}{2} + 5} + \sqrt{4 \cdot -\frac{1}{2} + 3} = \sqrt{7 - 4 \cdot -\frac{1}{2}};stimmt$ 1 $\quad \mathbb{L} = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Exponentialgleichung mit $\mathbb{G} = \mathbb{R}$.

$$9^x \cdot \frac{8}{4^{2x}} = 6$$

Lösung:

$$x \lg 9 + \lg 8 - 2x \lg 4 = \lg 6$$ 1

$$x(\lg 9 - 2\lg 4) = \lg 6 - \lg 8$$ 1

$$x = \frac{\lg 6 - \lg 8}{\lg 9 - 2\lg 4} = \frac{1}{2}$$ 1 $\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ A

1

c) Geben Sie den Definitionsbereich und die Lösungsmenge der folgenden Logarithmengleichung mit $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ an.

$$5 - \log_4(3x+19) = \log_4(x+1)$$

Lösung:

$$5 - \log_4(3x+19) = \log_4(x+1) \qquad \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} / x > -1\}$$ 1

$$5 = \log_4[(x+1)(3x+19)]$$ 1

$$4^5 = (x+1)(3x+19)$$ 1

$$1024 = 3x^2 + 19x + 3x + 19$$

1 $$3x^2 + 22x - 1005 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{-22 \pm \sqrt{22^2 - 4 \cdot 3 \cdot -1005}}{2 \cdot 3} = \frac{-22 \pm 112}{6}$$

1 $$x_1 = 15; \quad \left[x_2 = -\frac{67}{3}\right] \qquad \mathbb{L} = \{15\}$$ 1

3. Quadratische Funktionen (___/16)

a) Eine Parabel geht durch die Punkte A(0/-1), B(-6/8) und C(8/1). Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der Parabel.

b) Gegeben sind die folgenden Funktionsgleichungen:

Parabel p: $y = \frac{3}{10}x^2 + \frac{6}{5}x - \frac{9}{5}$

Gerade g: $y = -\frac{3}{2}x + 9$

b1) Bestimmen Sie für die Parabel die Koordinaten des Scheitelpunktes, der Nullstellen und des Schnittpunktes mit der y-Achse. (Nicht ganzzahlige Resultate sollen auf **zwei** Dezimalstellen genau angegeben werden.)

b2) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Funktionen.

b3) Zeichnen Sie die Graphen beider Funktionen ins nachfolgende Koordinatensystem ein. Tragen Sie alle berechneten Punkte ein und beschriften Sie sie.

Lösung: 1 1

a) $\begin{vmatrix} c=-1 \\ 36a-6b-1=8 \\ 64a+8b-1=1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 36a-6b=9 \\ 64a+8b=2 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 12a-2b=3 \\ 16a+2b=0.5 \end{vmatrix} \rightarrow \quad 28a=3.5 \rightarrow \quad a=\frac{1}{8}$ 1

$\rightarrow 8+8b=2 \rightarrow \quad 8b=-6 \quad \rightarrow \quad b=-\frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y=\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{4}x-1}$

1 1

b1) **Scheitelpunkt:** 2

$xS=-\frac{b}{2a}=-\frac{\frac{6}{5}}{\frac{6}{10}}=-2, \qquad yS=\frac{3}{10}\cdot(-2)^2+\frac{6}{5}\cdot(-2)-\frac{9}{5}=-3; \qquad \boldsymbol{S}(\boldsymbol{-2/-3})$

Nullstellen:

$0=\frac{3}{10}x^2+\frac{6}{5}x-\frac{9}{5} \quad \rightarrow \quad 3x^2+12x-18=0 \qquad x^2+4x-6=0$

$x1{,}2=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot1\cdot(-6)}}{2a}=\frac{-4\pm\sqrt{40}}{2a}$ 1

$x1=1.16, \quad x2=-5.16;$ 1 $\boldsymbol{N1(1.16/0)} \qquad \boldsymbol{N2(-5.16/0)}$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $\boldsymbol{Sy(0/-\frac{9}{5})}$ 1

b2) $\frac{3}{10}x^2+\frac{6}{5}x-\frac{9}{5}=-\frac{3}{2}x+9$

$3x^2+12x-18=-15x+90$

$3x^2+27x-108=0$

$x^2+9x-36=0$ 1

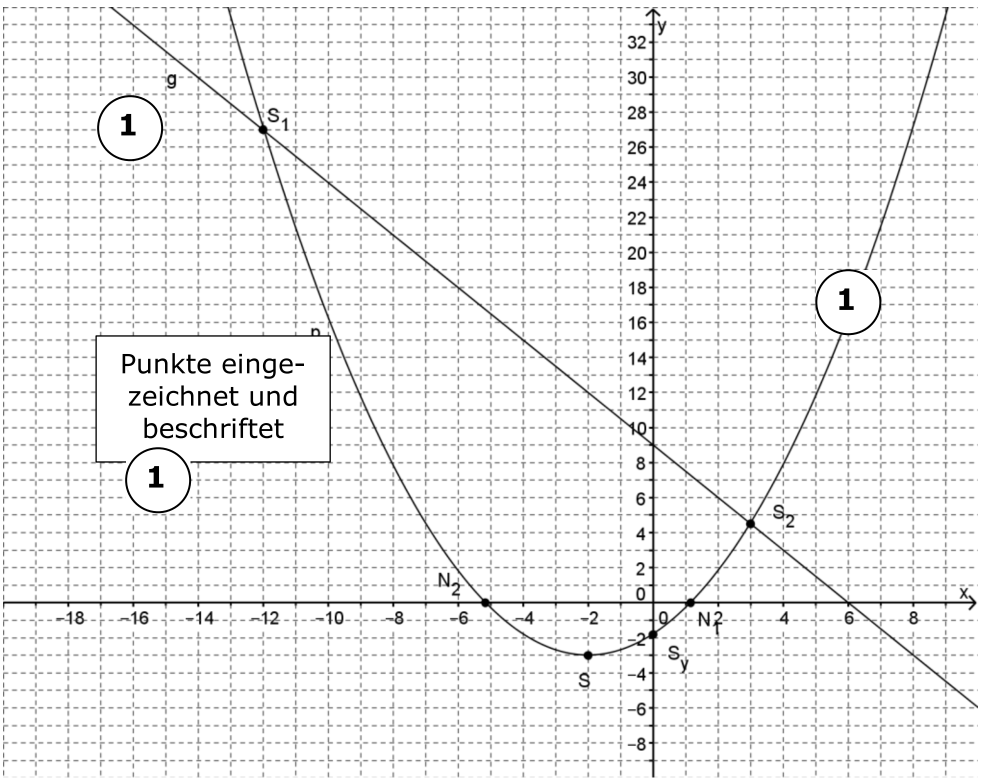
$(x+12)(x-3)=0$

1 1

$x1=-12, \qquad y1=-\frac{3}{2}\cdot(-12)+9=27$

$x2=3, \qquad y2=-\frac{3}{2}\cdot3+9=\frac{9}{2}=4.5 \qquad \boldsymbol{S1(-12/27)} \quad \boldsymbol{S2(3/4.5)}$

b3)



4. Lineare Optimierung (___/16)

Ein Blumengeschäft lanciert eine neue Linie von Blumensträussen. Ihre beiden Spitzenprodukte Love (x) und Luck (y) sollen dabei den Hauptteil des Umsatzes machen.
Love soll einen Verkaufspreis von CHF 50.— und Luck einen solchen von CHF 70.— haben.
Von den Love-Sträussen können täglich höchstens 360 Stück verkauft werden. Von der Sorte Luck sollen aber höchstens ein Drittel weniger verkauft werden als von der Sorte Love. Auf der anderen Seite sollen von Love höchstens 20% mehr Sträusse als von Luck abgesetzt werden.
Insgesamt muss das Unternehmen aber von beiden zusammen mindestens 600 Sträusse verkaufen.

a) Erstellen Sie für das Blumengeschäft die Definitionen, das Ungleichungssystem und die Zielfunktion für den maximalen Umsatz (keine Umformungen verlangt).

b) Durch Veränderungen am Markt ergeben sich für die Blumen neu folgende Definitionen, Ungleichungssysteme und Zielfunktion für den maximalen Umsatz:

Love: x $\mathbb{G} = \mathbb{N}_0 \, \mathrm{X} \, \mathbb{N}_0$
Luck: y

$\boldsymbol{a}: y \leq -\frac{5}{11}x + 420;\quad \boldsymbol{b}: x \leq 400;\quad \boldsymbol{c}: y \leq x + 116;\quad \boldsymbol{d}: y \geq \frac{1}{3}x;\quad \boldsymbol{e}: y \geq 60$

$Z = 30x + 90y;$

c) Zeichnen Sie die Situation in das unten folgende Koordinatensystem ein, kennzeichnen Sie das Planungspolygon und bestimmen Sie mit Hilfe von z_0 den Punkt für die Produktion mit maximalem Umsatz.

Lösung:

a) Love: x A $\mathbb{G} = \mathbb{N}_0 \, \mathrm{X} \, \mathbb{N}_0$
Luck: y

$a:\ x \leq 360$

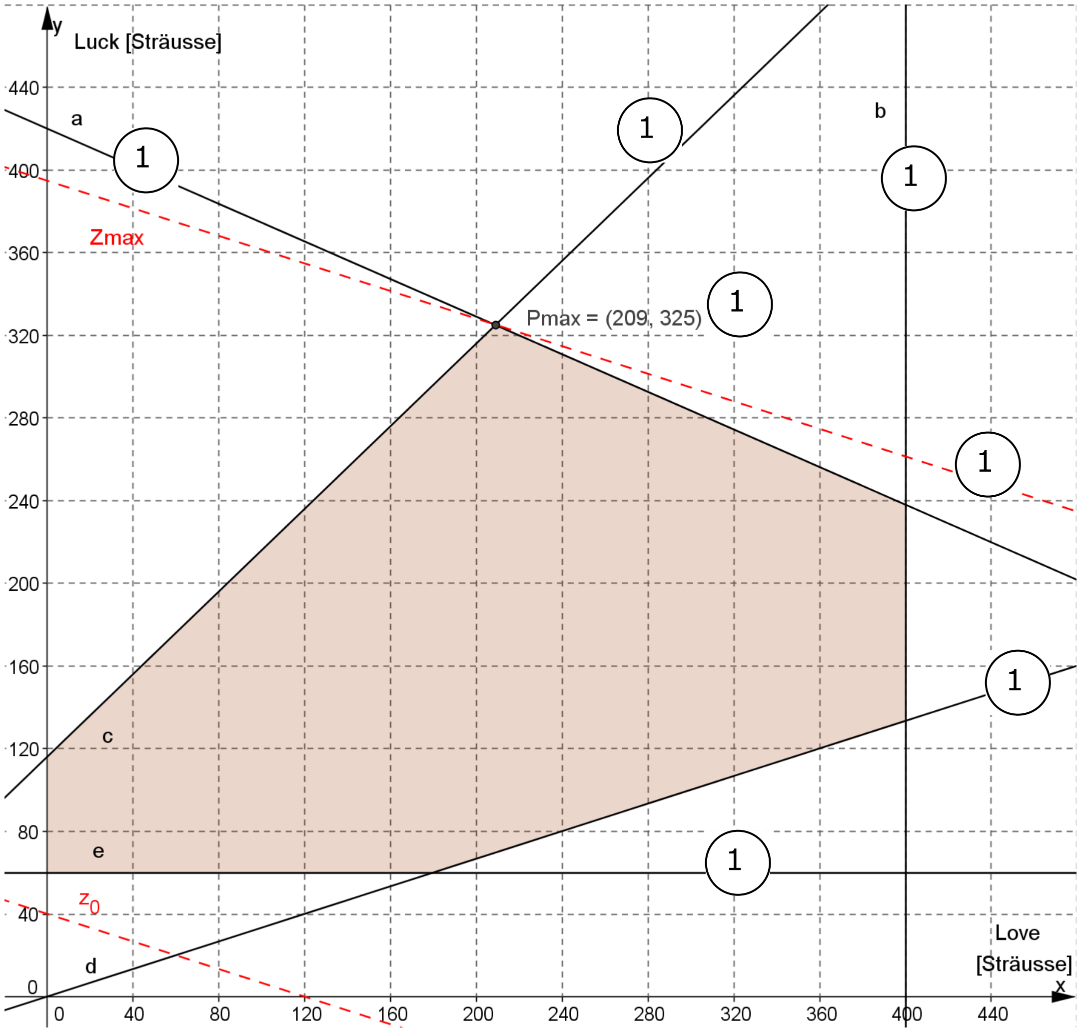
$b:\ y \geq \frac{2}{3}x$ 4

$c:\ x \leq 1.2y$

$d:\ x + y \geq 600$

$Z = 50x + 70y$ 1

b)



c) $x + 116 = -\frac{5}{11}x + 420$ 1

$\frac{16}{11}x = 304;\ \ x = 209; y = 209 + 116 = 325;$ $\boldsymbol{P_{max}(209/325)}$ 2

$Z = 30 \cdot 209 + 90 \cdot 325 = 35'520$ 1

Der maximale Umsatz beträgt CHF 35‘520.— bei 209 Love- und 325 Luck-Sträussen.

5. Finanzmathematik (___/7)

a) Welches Kapital hatte ein Bankkunde zu Beginn angelegt, wenn das Konto nach 20 Jahren einen Saldo von CHF 20‘077 aufweist? Dabei hat er nach den ersten 8 Jahren CHF 5‘000.— abgehoben. Die Bank gewährte dem Kunden immer einen Zinssatz von 0.75%.

Lösung:

vor 12 Jahren: $K_0 = \frac{20'077}{1.0075^{12}} = 18'355.16$ gerundet 1

vor 20 Jahren: $K_0 = \frac{23'355.15}{1.0075^{8}} = 21'999.99$ gerundet 2

Das Kapital betrug CHF 22‘000.—.

b) Wie hoch war der Zinssatz eines Kapitals von CHF 15‘000.—, welches in 15 Jahren auf CHF 17‘030.60 angewachsen ist?

Lösung:

1

1

$$q = \sqrt[15]{\frac{17'030.60}{15'000}} = 1.0085000$$

Der Zinssatz betrug 0.85%

c) Wie lange muss eine Maschine mit einem Kaufpreis von CHF 1‘750‘000.— degressiv abgeschrieben werden, bis sie noch maximal den symbolischen Wert von CHF 5.— hat, wenn der Abschreibungssatz 30% des jeweiligen Buchwertes beträgt??

Lösung:

1

$$n = \frac{\lg 5 - \lg 1'750'000}{\lg 0.7} = 35.79$$

Die Maschine wird in 36 Jahren abgeschrieben worden sein. 1

6. Textaufgaben (___/7)

Ein Käufer erwarb vor zwei Jahren Aktien zum Preis von CHF 500.— pro Stück. Erfreut stellte er fest, wie der Wert der Aktien während des ersten Jahres stieg. Im zweiten Jahr aber erfolgte ein massiver Kursverlust und eine Aktie hat jetzt noch einen Kurswert CHF 301.05. Dabei haben die Aktien im zweiten Jahr vier Mal so viel Prozent an Wert verloren, wie sie im ersten Jahr dazu gewonnen haben..

a) Wie viele Prozent haben die Aktien im ersten Jahr gewonnen?

b) Wie viele Prozent haben sie insgesamt verloren?

Lösung:

1

a) 1. Jahr: $500 + \frac{500 \cdot p}{100} = 500 + 5p$

2. Jahr: $500 + 5p - \frac{(500+5p)\cdot 4p}{100} = 301.05 \; /\cdot 100$ 1

$$50'000 + 500p - 2'000p - 20p^2 = 30'105$$ 1

$$0 = 20p^2 + 1'500p - 19'895$$ 1

$$p_{1,2} = \frac{-1'500 \pm \sqrt{1'500^2 + 4\cdot 20 \cdot 19'895}}{40} = \frac{-1'500 \pm 1'960}{40}$$

$$p_1 = 11.5 \;\; ; [p_2 = -..]$$ 1

Der Zuwachs betrug im ersten Jahr 11.5%.

b) $\frac{301.05 \cdot 100}{500} = 60.21$ **Verlust insgesamt: 39.79 %**

1 1

7. Lineare Funktionen (___/15)

Ein Reiseunternehmen will Ferien für eine Woche Kreta anbieten und hat dazu Offerten von zwei Hotels eingeholt. Hotel *Aphrodite Beach* verlangt eine Pauschale von CHF 4000.—; darin eingeschlossen sind 100 Übernachtungen. Jede zusätzliche Übernachtung kostet CHF 60.— mehr.
Im Hotel *Blue Sea* müssen für 20 Übernachtungen CHF 1760.— und für 100 Übernachtungen CHF 6‘880.— bezahlt werden. Es wird auch eine Reservationstaxe verlangt. Ab 130 Übernachtungen reduziert sich der Preis für jede weitere Übernachtung um 25%.

a) Erstellen Sie die Funktionsgleichungen für die Angebote der beiden Hotels.
b) Tragen Sie den Sachverhalt ins folgende Koordinatensystem ein.
c) Wie gross ist bei Angebot *Blue Sea* die Reservationstaxe?
d) Für welche Übernachtungszahlen ist die Offerte von *Aphrodite Beach* und für welche die Offerte von *Blue Sea* günstiger?

Lösung: 1

a) $Angebot\ A\colon\ x \le 100 \rightarrow \boldsymbol{y_A = 4'000}$ 1

$x > 100 \rightarrow y_A = 60(x-100) + 4'000$

$\boldsymbol{y_A = 60x - 2'000}$ 1

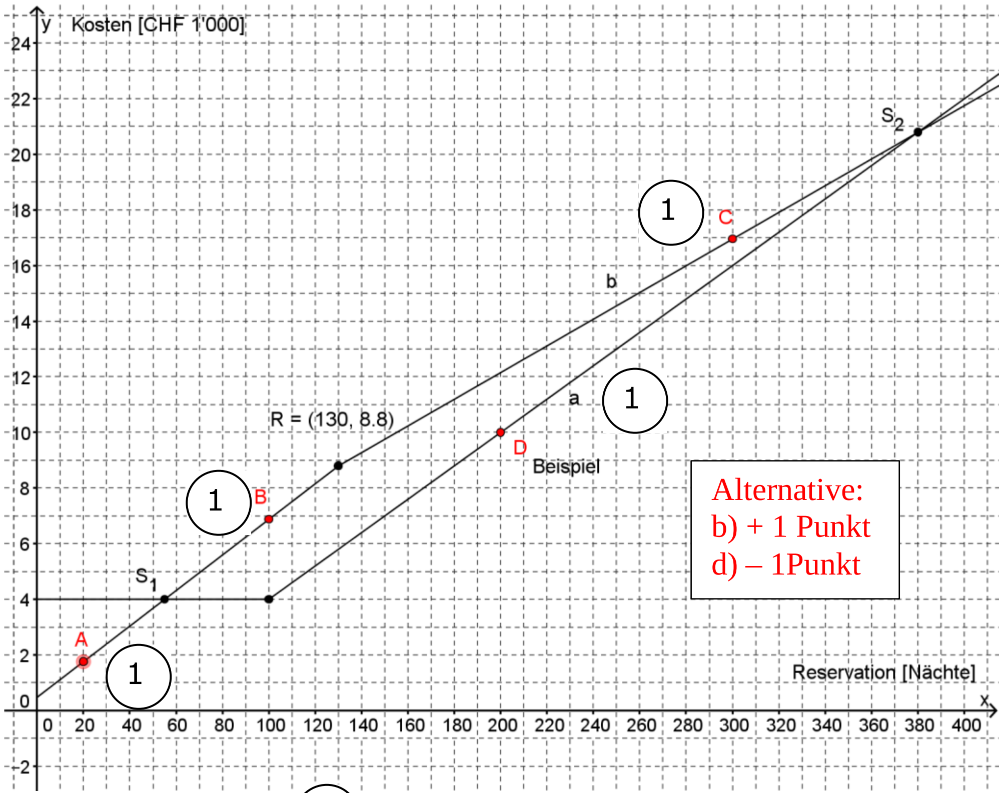
$Angebot\ B\colon\ m = \frac{6'880-1'760}{100-20} = 64;\ 1'760 = 64 \cdot 20 + b;\ b = 480$ 2

$x \le 130 \rightarrow \boldsymbol{y_B = 64x + 480}$ 1

$x > 130 \rightarrow y_B = 48(x-130) + 8'800$

$\boldsymbol{y_B = 48x + 2560}$ 1

b)



c) Sie liegt bei CHF 480.—. 1

d) $600x - 2'000 = 48x + 2'560$

$12x = 4'560;\quad x = 380;$ 1 $\quad y = 60 \cdot 380 - 2'000 = 20'800$

$64x + 480 = 4'000;\quad x = 55$ A wählt man zwischen 55 und 380 Tagen und sonst B.

1 1

8. Algebraische Umformungen (___/13)

a) Fassen Sie den folgenden Term zu einem einzigen Logarithmus zusammen und vereinfachen Sie:

$$log_a(x^4-y^2)-2log_a(x^2-y)-\frac{1}{2}log_a(y+x^2)$$

Lösung:

2 1

$$log_a(x^4-y^2)-2log_a(x^2-y)-\frac{1}{2}log_a(y+x^2)=log_a\frac{(x^2+y)\cdot(x^2-y)}{(x^2-y)^2\cdot(x^2+y)^{\frac{1}{2}}}=log_a\frac{(x^2+y)^{\frac{1}{2}}}{(x^2-y)}$$

b) Vereinfachen Sie:

$$\frac{4x^2-16x+16}{128-16x^2-32x}$$

Lösung:

1 1 1

$$\frac{4x^2-16x+16}{128-16x^2-32x}=\frac{4(x^2-4x+4)}{-16(x^2+2x-8)}=\frac{4(x-2)^2}{-16(x-2)(x+4)}=-\frac{(x-2)}{4(x+4)}\,oder\cdot\frac{2-x}{4(x+4)}$$

1

c) Vereinfachen Sie:

$$\frac{3x+4}{2x+6}+\frac{2-x}{2x-6}-\frac{6x}{6x+18}$$

Lösung:

1 1

$$\frac{3x+4}{2x+6}+\frac{2-x}{2x-6}-\frac{6x}{6x+18}=\frac{3x+4}{2(x+3)}+\frac{2-x}{2(x-3)}-\frac{\cancel{6}x}{\cancel{6}(x+3)}=\frac{(x-3)(3x+4)+(2-x)(x+3)-2x(x-3)}{2(x+3)(x-3)}=$$

$$\frac{3x^2+4x-9x-12+2x+6-x^2-3x-2x^2+6x}{2(x+3)(x-3)}=\frac{-6}{2(x+3)(x-3)}=-\frac{3}{(x+3)(x-3)}$$ 1

1

d) Berechnen Sie folgenden Logarithmus:

$$\log_b\left(\sqrt[4]{b^{\frac{6}{7}}}\right)$$

Lösung:

$$\log_b\left(\sqrt[4]{b^{\frac{6}{7}}}\right)=\log_b\left(b^{\frac{6}{28}}\right)=\frac{3}{14}$$ 1

1