WIRTSCHAFTSSCHULE KV CHUR

berufsfachschule davos

Abschlussprüfung 2014
Mathematik

Lösungen

Material Arbeitsblätter, Häuschenblätter

Hilfsmittel netzunabhängiger, nicht programmierbarer Taschenrechner, Formelblatt

Zeit 150 Minuten

Hinweise

- **Beschriften Sie alle Häuschenblätter** mit Ihrem Namen und Vornamen.
- Sie müssen nicht der Reihe nach arbeiten. Kennzeichnen Sie aber jede Aufgabe mit der entsprechenden Nummer und trennen Sie die nächste Nummer mit einer waagrechten Linie ab.
- Der Lösungsweg muss überall übersichtlich dargestellt werden; unbelegte Resultate werden nicht berücksichtigt!
- Mehrfachlösungen sind nicht gestattet; Ungültiges ist deutlich zu streichen. Die gültigen Endergebnisse sind deutlich zu kennzeichnen.
- Die Lösungen und Lösungswege sind auf die bereitgelegten Häuschenblätter zu schreiben, nur die Grafiken werden direkt auf den Aufgabenblättern erstellt.

Bewertung

Aufgabe	mögliche Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	11	
2	14	
3	15	
4	17	
5	11	
6	6	
7	13	
8	13	
8 Aufgaben	**100**	

Note: ____________

Unterschrift ExpertIn 1

____

Unterschrift ExpertIn 2

____

1. Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen (___/11)

Bestimmen Sie die Definitionsmenge und die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems. (Grundmenge $\mathbb{G} = \mathbb{Q}x\mathbb{Q}$)

$$\left|\begin{array}{l} \frac{x}{4x+6} - \frac{1}{4} = \frac{6x}{2xy+3y} \\ \frac{x+3}{x-2} = \frac{y-10}{y-5} \end{array}\right|$$

Lösung:

$\mathbb{D}_x = \mathbb{Q} \setminus \left\{-\frac{3}{2}/2\right\},\ \mathbb{D}_y = \mathbb{Q} \setminus \{0/5\}$ 2

1. Gleichung:

$\frac{x}{4x+6} - \frac{1}{4} = \frac{6x}{2xy+3y}$

$\frac{x \cdot 2y}{2(2x+3)2y} - \frac{1 \cdot y(2x+3)}{4 \cdot y(2x+3)} = \frac{6x \cdot 4}{y(2x+3) \cdot 4}$ 1

$2xy - 2xy - 3y = 24x$ 2

$-3y = 24x$

$24x + 3y = 0$ 1

$\mathbf{8x + y = 0}$

2. Gleichung:

$\frac{x+3}{x-2} = \frac{y-10}{y-5}$

$xy - 5x + 3y - 15 = xy - 2y - 10x + 20$ 1

$5x + 5y = 35$

$x + y = 7$ 1

$$\left|\begin{array}{r} -8x - y = 0 \\ x + y = 7 \end{array}\right|$$

$-7x = 7$

$x = -1$ 2

$y = 8$ $\mathbb{L} = \{(-1/8)\}$ 1

2. Gleichungen und Ungleichungen (___/14)

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Wurzelgleichung mit $\mathbb{G} = \mathbb{R}$.

$$\sqrt{5x+1} - \sqrt{7-x} = 2$$

Lösung:

$$\sqrt{5x+1} - \sqrt{7-x} = 2$$

$$5x + 1 - 2\sqrt{5x+1}\sqrt{7-x} + 7 - x = 4 \quad 1$$

$$-2\sqrt{5x+1}\sqrt{7-x} = -4x - 4$$

$$\sqrt{5x+1}\sqrt{7-x} = 2x + 2$$

$$35x - 5x^2 + 7 - x = 4x^2 + 8x + 4 \quad 1$$

$$0 = 9x^2 - 26x - 3 \quad 1$$

$$x_{1;2} = \frac{26 \pm \sqrt{26^2 - 4 \cdot 9 \cdot -3}}{2 \cdot 9} = \frac{26 \pm 28}{18} \quad 1$$

$$x_1 = 3; \quad x_2 = -\frac{1}{9}$$

Probe: $\sqrt{5 \cdot 3 + 1} - \sqrt{7-3} = 2;\ \textit{stimmt}$ 1

$\sqrt{5 \cdot -\frac{1}{9} + 1} - \sqrt{7 + \frac{1}{9}} = 2; \textit{falsch}$ $\mathbb{L} = \{\mathbf{3}\}$ 1

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Exponentialgleichungen mit $\mathbb{G} = \mathbb{Q}$.

$$\sqrt{8^{3x+2}} = 4^{x-1}$$

Lösung

$$\sqrt{8^{3x+2}} = 4^{x-1}$$
$$8^{\frac{3x+2}{2}} = 4^{x-1}$$
$$(2^3)^{\frac{3x+2}{2}} = (2^2)^{x-1} \quad 1$$
$$2^{\frac{9x+6}{2}} = 2^{2x-2}$$
$$\frac{9x+6}{2} = 2x - 2 \quad 1$$
$$9x + 6 = 4x - 4$$
$$x = -2 \qquad \mathbb{L} = \{-2\} \quad 1$$

c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Logarithmengleichung mit $\mathbb{G} = \mathbb{R}^+$.

$$\log_5(3x-7) + \log_5(6x+1) = 3$$

Lösung

$$\log_5(3x-7) + \log_5(6x+1) = 3$$
$$\log_5(3x-7)(6x+1) = 3 \quad 1$$
$$(3x-7)(6x+1) = 5^3 \quad 1$$
$$18x^2 + 3x - 42x - 7 = 125$$
$$1 \quad 18x^2 - 39x - 132 = 0$$
$$x_{1;2} = \frac{39 \pm \sqrt{39^2 + 4 \cdot 18 \cdot 132}}{2 \cdot 18} = \frac{39 \pm 105}{36}$$
$$1 \quad x_1 = 4; \quad [x_2 = -1.8 \ldots] \qquad \mathbb{L} = \{4\} \quad 1$$

3. Quadratische Funktionen (___/15)

Gegeben ist die Funktion der Parabel mit p: $\boldsymbol{y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{13}{3}}$:

und eine Gerade g, welche durch die Punkte P(-7/2) und Q(10/-15) geht.

(Resultate, welche nicht ganzzahlig sind, sollen auf eine Dezimalstelle genau angegeben werden.)

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes und der Nullstellen der Parabel, sowie die Koordinaten ihres Schnittpunktes mit der y-Achse.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden.

c) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte beiden Funktionen.

Wenn Sie b) nicht lösen konnten, rechnen Sie mit der Geraden mit der Gleichung g: $\boldsymbol{y = \frac{3}{2}x - 4}$

d) Zeichnen Sie die Graphen der beiden Funktionen in das unten stehende Koordinatensystem ein. Tragen Sie alle berechneten Punkte ein und beschriften Sie sie.

Lösung:

a) Scheitel: $x_S = \frac{-\frac{2}{3}}{2\cdot(-\frac{1}{6})} = 2,\ y_S = -\frac{1}{6}\cdot 2^2 + \frac{2}{3}\cdot 2 + \frac{13}{3} = 5 \quad \to S(2/5)$ 2

Nullstellen

$0 = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}\mathrm{x} + \frac{13}{3} \quad \to \quad \mathrm{x}^2 - 4\mathrm{x} - 26 = 0$

$x = \frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot(-26)}}{2} = \frac{4\pm\sqrt{120}}{2} \quad \to \quad \mathrm{x}_1 = -3.477, \mathrm{x}_2 = 7.477 \qquad N_1(-3.5/0), N_2(7.5/0)$ 2

$S_y\left(0/\frac{13}{3}\right), oder\ S_y(0/4.3),$ 1

b) $m = \frac{-15-2}{10+7} = -1$ 1

$2 = -1\cdot(-7) + b \quad \longrightarrow \quad b = -5 \quad \longrightarrow \quad y = -x - 5$ 1

c) $-\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}\mathrm{x} + \frac{13}{3} = -\mathrm{x} - 5 \quad \to \quad -\mathrm{x}^2 + 4\mathrm{x} + 26 = -6\mathrm{x} - 30 \quad \longrightarrow \quad \mathrm{x}^2 - 10\mathrm{x} - 56 = 0$ 1

1

$\longrightarrow \quad (\mathrm{x}+4)(\mathrm{x}-14) = 0$

$\mathrm{x}_1 = -4,\ \mathrm{x}_2 = 14 \quad \longrightarrow \quad \mathrm{y}_1 = -1,\quad \mathrm{y}_2 = -19 \qquad S_1(-4\,/-1), S_2(14/-19)$

1 1 A

Alternative:

1 1

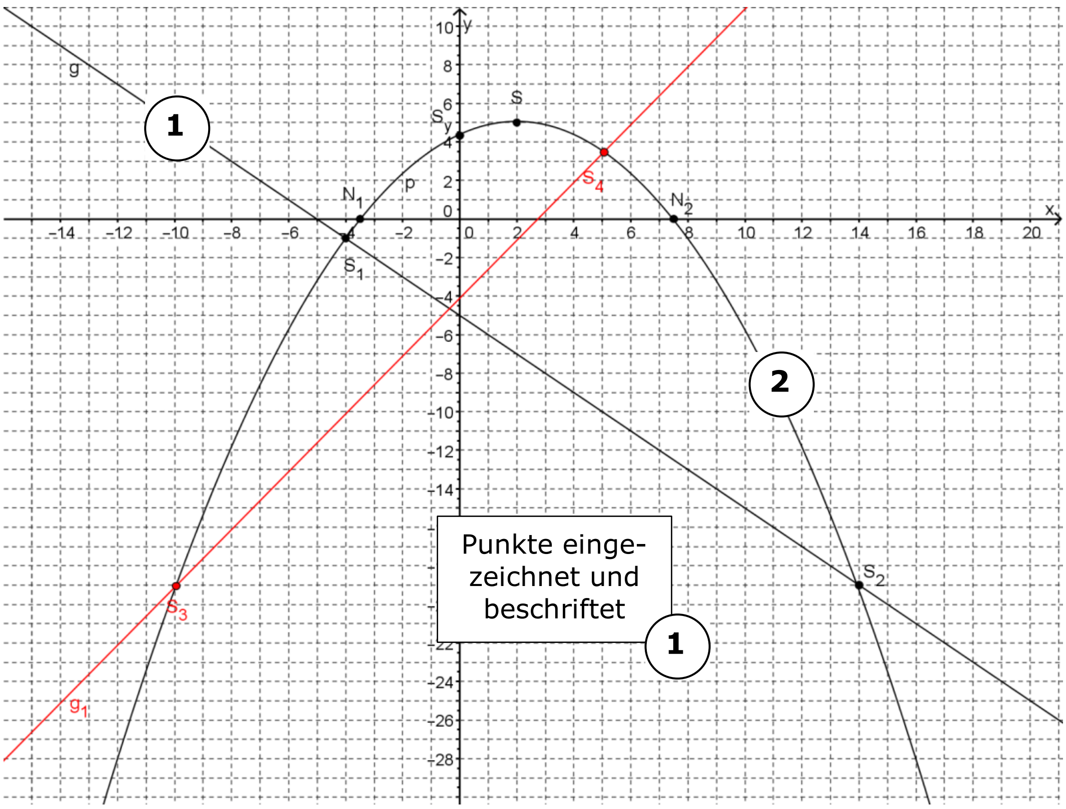
$-\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}\mathrm{x} + \frac{13}{3} = \frac{3}{2}\mathrm{x} - 4 \quad \to \quad -\mathrm{x}^2 + 4\mathrm{x} + 26 = 9\mathrm{x} - 24 \quad \longrightarrow \quad \mathrm{x}^2 + 5\mathrm{x} - 50 = 0$

$\longrightarrow \quad (\mathrm{x}+10)(\mathrm{x}-5) = 0$

$\mathrm{x}_1 = -10,\ \mathrm{x}_2 = 5 \quad \longrightarrow \quad \mathrm{y}_1 = -19,\quad \mathrm{y}_2 = 3.5 \qquad S_3(-10\,/-19), S_4(5/3.5)$

1 1 A

d)



4. Lineare Optimierung (___/17)

Die Firma Bikedream möchte gerne in den Markt der E-Bikes einsteigen. Dabei will sie eine Damenversion (x) und eine Herrenversion (y) produzieren.
Für die gesamte E-Bike-Sparte will die Firma mindestens CHF 1‘800‘000.— investieren, wobei ein Damenrad Kosten von CHF 210.— und dasjenige der Herren solche von CHF 180.— pro Stück verursacht.
Im Ganzen hat Bikedream höchstens 240‘000 Arbeitsstunden für die E-Bike-Sparte zur Verfügung. Man hat errechnet, dass ein Herrenrad 20 Stunden und ein Damenrad 18 Stunden Arbeit verursacht.
Weiter braucht ein Damenrad für den Rahmen 5 kg Grundmaterial und bei der Herrenversion sind es 6 kg davon. Der Lieferant von diesem Grundmaterial will aber nur einsteigen, wenn er mindestens 15 Tonnen liefern kann.
Man ist sich auch sicher, dass man höchstens drei Mal so viele Damen- wie Herrenräder benötigt.
Wegen der Auslastung der Abteilungen müssen aber mindestens ein Fünftel so viele Herren wie Damenräder hergestellt werden.
Der Gewinn bei einem Herrenrad liegt bei CHF 600.— und bei der Damenversion bei CHF 800.—.

a) Erstellen Sie für Bikedream die Definitionen und das Ungleichungssystem (keine Umformungen verlangt).

b) Erstellen Sie die Zielfunktion für den maximalen Gewinn.

c) Durch Veränderungen am Markt ergeben sich für Bikedream neu folgende Definitionen, Ungleichungssysteme und Zielfunktion für den maximalen Gewinn:

$\boldsymbol{a}: y \leq -\frac{3}{5}x + 12'500;$ $\boldsymbol{b}: y \geq -\frac{5}{3}x + 10'000;$ $\boldsymbol{c}: y \geq -\frac{1}{6}x + 5'000;$ $\boldsymbol{d}: y \geq \frac{2}{5}x;$
$\boldsymbol{e}: y \leq 4x;$ $Z = 900x + 400y;$ $\mathbb{G} = \mathbb{N}_0 \text{ X } \mathbb{N}_0$

d) **Berechnen** Sie P_{max} und den dazugehörigen maximalen Gewinn?

Lösung

a) Damen: x $\mathbb{G} = \mathbb{N}_0 \text{ X } \mathbb{N}_0$ 5
Herren: y

a: $210x + 180y \geq 1'800'000$

b: $18x + 20y \leq 240'000$

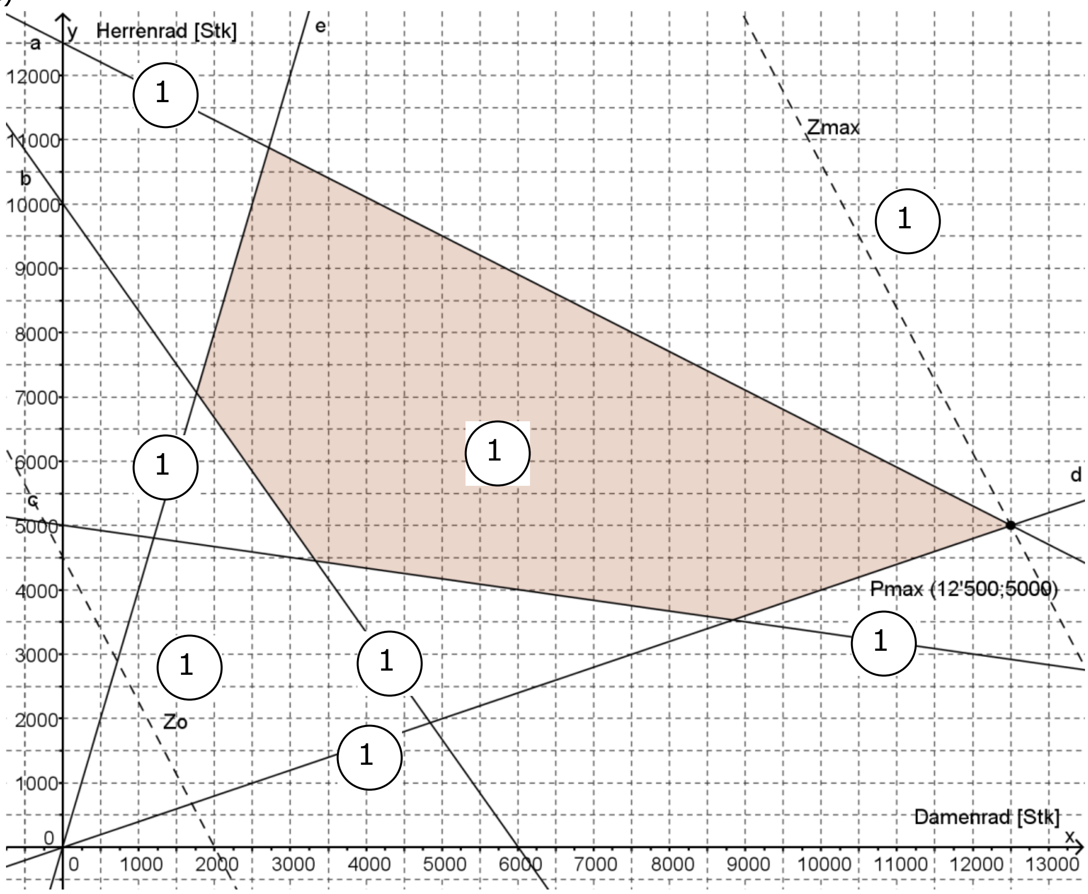
c: $5x + 6y \geq 15'000$

d: $x \leq 3y$

e: $y \geq \frac{1}{5}x$

b) $Z = 800x + 600y$ 1

c)



d) $-\frac{3}{5}x + 12'500 = \frac{2}{5}x \quad \backslash + \frac{3}{5}x$ 1 1

$12'500 = x;$ $y = \frac{2}{5} \cdot 12'500 = 5000$ $P_{max}(12'500/5'000)$

$Z = 900 \cdot 12'500 + 400 \cdot 5'000 = 13'250'000$ 1

Der maximale Gewinn beträgt CHF 13‘250‘000 bei 12‘500 Damen- und 5‘000 Herrenrädern.

5. Finanzmathematik (___/11)

a) Curdin legt am Anfang des Jahres 2002 CHF 150‘000.— auf der Bank an. In den ersten 5 Jahren beträgt der Zinssatz 1.25%, danach 0.75%. Anfangs 2009 erbt er von seinem Patenonkel einen bestimmten Betrag, welchen er auf das gleiche Konto einbezahlt. Anfangs 2014 beträgt der Saldo auf seinem Konto CHF 214‘895.90
Wie gross war das Erbe?

Lösung: 1

Nach 5 Jahren: $K_n = 150000 \cdot 1.0125^5 = 159'612.323$

Nach 7 Jahren: $K_n = 159612.323 \cdot 1.0075^2 = 162'015.4861$ 1

Anfangs 2009: $K_0 = \frac{214895.90}{1.0075^5} = 207'015.4861$ 1

Differenz: 1

$207'015.4861 - 162'015.4861 = 45'000$ Das Erbe beträgt CHF 45‘000.—.

b) Curdin hat noch ein anderes Konto, das ihm seine Patentante zu seiner Geburt mit einem Saldo von CHF 40‘000.— geschenkt hat und welches er so lange unangetastet lassen möchte, bis er sich von den Zinsen jedes Jahr eine einfache Ferienreise gönnen kann, ohne dass der Saldo kleiner wird. Wie viele Jahre muss er warten, wenn er mit CHF 750.— für die Reise und mit einem durchschnittlichen Zinssatz von 1.5% rechnet?

Lösung:
Kapital, welches jährlich einen Zins von CHF 750.— abwirft:
$K = \frac{100 \cdot z}{p} = \frac{100 \cdot 750}{1.5} = 50'000$ 1
Zeit, bis dieses Kapital erreicht wird:
$n = \frac{lgK_n - lgK_0}{lgq} = \frac{lg50'000 - lg40000}{lg1.015} = 14.98$ 2 Er muss 16 Jahre lang warten. 1

c) Zu welchem Prozentsatz wird eine Maschine jährlich degressiv abgeschrieben, wenn sie neu CHF 450‘000.— gekostet hat und ihr Buchwert nach 15 Jahren noch CHF 60‘720.20 beträgt?

Lösung: 1 1 1
$q = \sqrt[15]{\frac{K_n}{K_0}} = \sqrt[15]{\frac{60720.20}{450000}} = 0.874999 \ldots \longrightarrow \quad p = 12.5\%$
Die Maschine wurde mit jährlich mit 12.5% abgeschrieben.

6. Textaufgaben (___/6)

Zwei Kapitalien ergeben in 5 Monaten zusammen CHF 433.75 Zinsen. Dabei wird das erste Kapital zu 2% und das zweite zu 1.5% verzinst. Vertauscht man die Zinssätze, so ergeben die beiden in der gleichen Zeit zusammen CHF 458.75 Zinsen. Wie gross sind die beiden Kapitalien?

Lösung
$433.75 = \frac{k_1 \cdot 2 \cdot 5}{1200} + \frac{k_2 \cdot 1.5 \cdot 5}{1200}$ 1
$458.75 = \frac{k_1 \cdot 1.5 \cdot 5}{1200} + \frac{k_2 \cdot 2 \cdot 5}{1200}$ 1

$$\begin{aligned}
520'500 &= 10k_1 + 7.5k_2 \quad \backslash \cdot 3 \\
550'500 &= 7.5k_1 + 10k_2 \quad \cdot 4 \\
1'561'500 &= 30k_1 + 22.5k_2 \\
2'202'000 &= 30k_1 + 40k_2 \\
17.5k_2 &= 640'500 \\
k_2 &= 36'600 \\
10k_1 + 7.5 \cdot 36'600 &= 520'500 \\
k_1 &= 24'600
\end{aligned}$$

2 1

Das erste Kapital beträgt CHF 24‘600.— und das zweite CHF 36‘600.—. 1

7. Lineare Funktionen (___/13)

Bei der Herstellung eines neuen DAB+-Radiogerätes entstehen Fixkosten von CHF 2‘400‘000.— Das Gerät soll am Markt für CHF 180.— das Stück verkauft werden. Dazu will die Firma bei 30‘000 Stück Break-even erreichen.

a) Erstellen Sie die Gleichungen für die Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktion.

b) Zeichnen Sie den Sachverhalt in das folgende Koordinatensystem ein.

(falls Sie a) nicht lösen konnten, nehmen Sie folgende Funktionen:
$y_e = 200x;\ y_k = 140x + 2'000'000\ und\ y_g = 60x - 2'000'000$)

c) Wie viel Radios muss die Firma absetzen, wenn sie im nächsten Jahr mindestens einen Gewinn von CHF 1‘395‘520.— machen will?

d) Durch eine Rohstoffknappheit steigen die Herstellungskosten um 20%. Wie teuer muss die Firma das Gerät nun verkaufen, wenn sie Break-even spätestens bei einer Stückzahl von 32‘000 erreichen will?

Lösung

a) $y_e = 180x$ 1

Breakeven: $y_e = 180 \cdot 30'000 = 5'400'000$

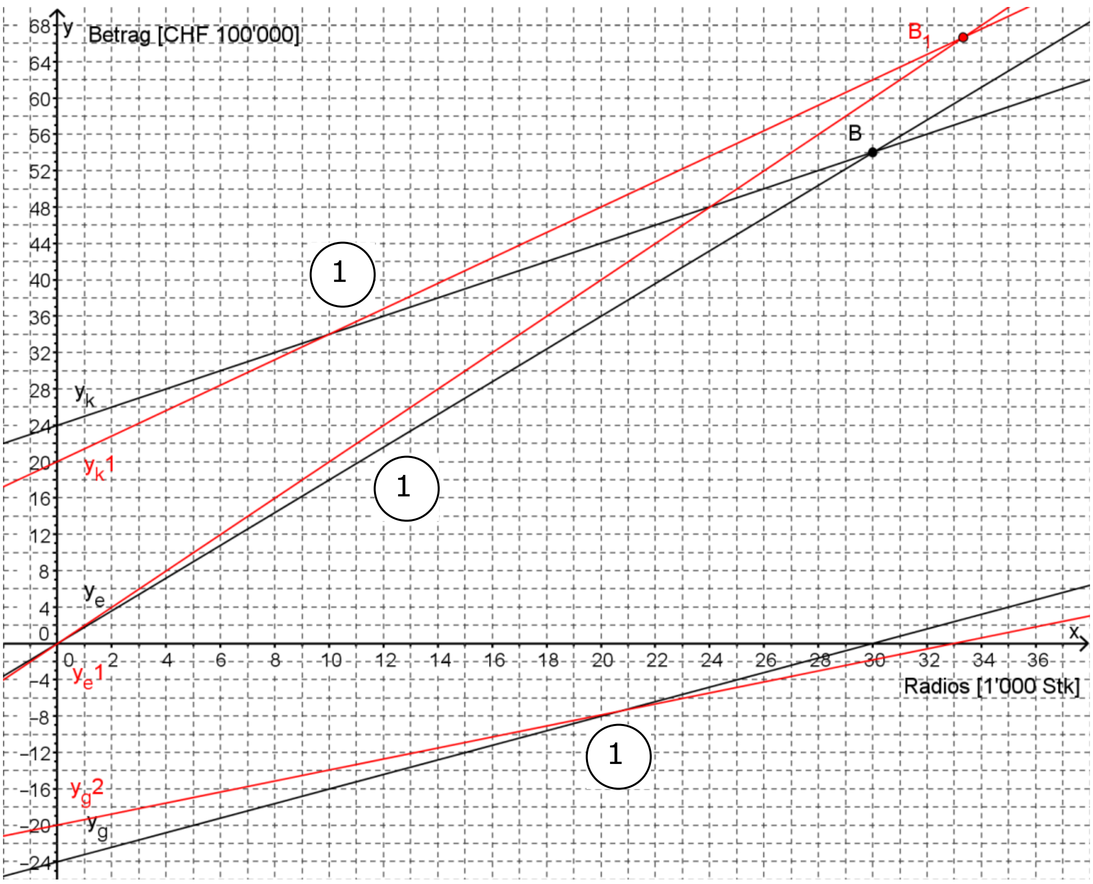
$y_k = 5'400'000 = m \cdot 30'000 + 2'400'000; \quad m = 100$ 2

$y_k = 100x + 2'400'000$ 2

$y_g = \ 80x - 2'400'000$

b) $0 = 60x - 2'000'000;\ x = 33'333$

$y_e = 200 \cdot 33'333 = 6'600'000;\ B_1(33'333/6'666'666)$



c) $y_g = 1'395'520 = 80x - 2'400'00; \quad x = 47'444$ 1
Sie muss mindestens 47‘444 Radios verkaufen. 1
$y_g = 1'395'520 = 60x - 2'000'000; \quad x = 56'592$
Sie muss mindestens 56‘592 Radios verkaufen.

d) $y_k = 120x + 2'400'000$ 1
Breakeven: $y_k = 120 \cdot 32'000 + 2'400'000 = 6'240'000$ 1
$y_e = 6'240'000 = m \cdot 32'000; \quad m = 195$
Das Radio muss neu für mindestens CHF 195.— verkauft werden 1
$y_k = 168x + 2'000'000$
Breakeven: $y_k = 168 \cdot 32'000 + 2'000'000 = 7'376'000$
$y_e = 7'376'000 = m \cdot 32'000; \quad m = 230.50$
Das Radio muss neu für mindestens CHF 230.50 verkauft werden.

8. Algebraische Umformungen (___/13)

a) Fassen Sie den folgenden Term zu einem einzigen Logarithmus zusammen und vereinfachen Sie:
$log_c(a^2 - 4b^2) - log_c(a - 2b) - log_c(ac^2 + 2bc^2)$

Lösung: 2 1
$log_c(a^2 - 4b^2) - log_c(a - 2b) - log_c(ac^2 + 2bc^2) = log_c \frac{(a+2b)\cdot(a-2b)}{(a-2b)\cdot c^2 (a+2b)} = log_c \frac{1}{c^2} = -2$ 1

b) Vereinfachen Sie:
$$\frac{\frac{3}{x-y} - \frac{2}{2x+y}}{\frac{16x^2-25y^2}{2x^2-xy-y^2}}$$

Lösung:
$$\frac{\frac{3}{x-y} - \frac{2}{2x+y}}{\frac{16x^2-25y^2}{2x^2-xy-y^2}} = \frac{\frac{3\cdot(2x+y)}{(x-y)\cdot(2x+y)} - \frac{2\cdot(x-y)}{(2x+y)\cdot(x-y)}}{\frac{(4x-5y)(4x+5y)}{(2x+y)(x-y)}} = \frac{6x+3y-2x+2y}{(x-y)\cdot(2x+y)} \cdot \frac{(2x+y)\cdot(x-y)}{(4x-5y)\cdot(4x+5y)}$$
$$= \frac{4x+5y}{(x-y)\cdot(2x+y)} \cdot \frac{(2x+y)\cdot(x-y)}{(4x-5y)\cdot(4x+5y)} = \frac{4x+5y}{(4x-5y)\cdot(4x+5y)} = \frac{1}{4x-5y}$$
2 2 1

c) Vereinfachen Sie:
$$\sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{ab^3}}} \cdot a \cdot \sqrt[10]{b^3 \cdot (a^{-5}b)^2}$$
4

Lösung:
$$\sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{ab^3}}} \cdot a \cdot \sqrt[10]{b^3 \cdot (a^{-5}b)^2} = a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{6}} \cdot b^{-\frac{3}{6}} \cdot a^1 \cdot b^{\frac{3}{10}} \cdot a^{-\frac{10}{10}} \cdot b^{\frac{2}{10}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot b^0 = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$